Análise Matemática IV

Problemas para as Aulas Práticas

Semana 7 - 16 a 20 de Abril de 2007

1. Utilize o teorema dos resíduos para calcular os seguintes integrais no plano complexo, em que as curvas de Jordan indicadas são percorridas uma vez no sentido positivo

   a) $\displaystyle\oint_{|z+1+i|=2} \frac{\operatorname{sen} z}{z^2-1}\, dz$

   b) $\displaystyle\oint_{|z|=4} \frac{\operatorname{sen} z}{z^2(\pi - z)}\, dz$

   c) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{e^z-1}{z^3}\, dz$

2. Calcule o seguinte integral

$$\oint_C \left(\frac{z^2}{\operatorname{sen}\,(\pi z)} + z^2 \operatorname{sen} \frac{1}{(z-1)^2} \right) dz,$$

   onde C é a elipse $|z-1| + |z+1| = 3$, percorrida uma vez no sentido positivo.

3. Recorrendo ao Teorema dos Resíduos, mediante a escolha de um contorno de integração adequado, estabeleça os seguintes resultados:

   a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\operatorname{sen}^2\theta} = \pi\sqrt{\frac{2}{3}}$

   b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta}{5-4\cos 2\theta}\, d\theta = \frac{3\pi}{8}$

   Sugestão: mostre que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(3\theta)}{5-4\cos(2\theta)}\, d\theta = \frac{1}{2}\mathrm{Re} \int_0^{2\pi} \frac{1+e^{i6\theta}}{5-4\cos(2\theta)}\, d\theta$

   c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+3)}\, dx = \frac{(3-\sqrt{3})\pi}{6}$

   d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^4+4)}\, dx = \frac{\pi}{12}$

   e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6+1} = \frac{2\pi}{3}$

   f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{(x^2+1)}\, dx = \frac{\pi}{e}$

g) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)}\,dx = \frac{\pi}{2e}$

4. Seja $f(z)$ uma função analítica no conjunto $A = \mathbb{C} - \{z_1, \ldots, z_n\}$. Observe que a função $F(z) = \frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z})$ possui uma singularidade isolada em $z = 0$. Define-se o **resíduo de f em** ∞ por:

$$\mathrm{Res}(\mathrm{f}, \infty) = -\mathrm{Res}(\mathrm{F(z)}, 0).$$

Mostre que se $\gamma \subset A$ é uma curva simples, fechada, percorrida no sentido directo, que contém os pontos $\{z_1, \ldots, z_n\}$ no seu interior, então:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = -2\pi i\ \mathrm{Res}(\mathrm{f}, \infty).$$