

Análise Matemática IV

Problemas para as Aulas Práticas

Semana 9 - 30 de Abril a 4 de Maio de 2007

1. Determine a solução da equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t^2 + 3y^2}{2ty}, \quad t > 0 \quad \text{e} \quad y > 0$$

que verifica a condição inicial $y(1) = -1$ e indique o intervalo máximo de definição da solução.

Sugestão: Considere a mudança de variável $v = y/t$.

2. Determine a solução do problema de Cauchy

$$3t^2 + 4tx + (2x + 2t^2)x' = 0, \quad x(0) = 1$$

e esclareça qual é o seu intervalo máximo de existência.

3. Considere a equação diferencial

$$\frac{y}{x} + (y^3 - \log x) \frac{dy}{dx} = 0 \tag{1}$$

- a) Verifique que (1) tem um factor integrante da forma $\mu = \mu(y)$ e determine-o.
b) Prove que as soluções de (1) são dadas implicitamente por $\Phi(x, y) = C$, onde C é uma constante arbitrária e

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{y} \log x$$

- c) Determine a solução de (1) que satisfaz a condição inicial $y(1) = \sqrt{2}$.

4. Considere a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{4y^2 + 2x}$$

- a) Mostre que esta equação tem um factor integrante $\mu = \mu(y)$.
b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial $y(1) = 1$.
c) Determine o intervalo máximo de existência da solução que calculou na alínea anterior.

5. a) Determine em que condições uma equação da forma

$$M(t, x) + N(t, x)x' = 0$$

admite um factor integrante que é uma função de t , isto é, da forma $\mu(t)$, para uma certa função real de variável real μ , e escreva uma equação diferencial ordinária satisfeita por μ .

- b) Considere a equação diferencial ordinária

$$\frac{x}{t} - \operatorname{sen}(t) + x' = 0 \quad (2)$$

Mostre que a equação não é exacta. Use o resultado da alínea (a) para determinar a solução da equação (2) que satisfaz a condição inicial $x(\pi) = 1$. Indique o intervalo máximo de definição da solução obtida.

6. Considere o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y^2 \left(\frac{1}{x} + \log x \right) + 2y \log x \frac{dy}{dx} = 0 \\ y(e) = -1 \end{cases}$$

Obtenha explicitamente a solução deste problema e determine o seu intervalo máximo de definição.

7. Considere a equação diferencial ordinária

$$(4x^2y + 3xy^2 + 2y^3) + (2x^3 + 3x^2y + 4xy^2) \frac{dy}{dx} = 0 \quad (3)$$

- a) Mostre que (3) tem um factor integrante do tipo $\mu = \mu(xy)$.
- b) Mostre que a solução de (3) com condição inicial $y(-1) = 1$ é dada implicitamente pela expressão $x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 = 1$.
- c) Determine o polinómio de Taylor de segunda ordem, no ponto -1 , da solução dada implicitamente na alínea anterior.
8. Para cada uma das seguintes equações diferenciais, esboce o campo de direcções e trace os respectivos tipos de soluções .

a) $y' = \frac{ty}{1+t^2}$, b) $y' = (2-y)(y-1)$,

c) $y' = y(1-y^2)$, d) $y' = \frac{y+t}{y-t}$.