Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

1º EXAME DE ANÁLISE MATEMÁTICA I

CURSOS: Civil, Mecânica, Matemática, Física, Informática, Gestão, Território, Aeroespacial, Electricidade e Ambiente

2º Semestre 1999/2000

26 de Junho de 2000, 17.00 Duração: 3 horas

I (6 val.)

1. Estude quanto à convergência em $\overline{\mathbb{R}}$ as sucessões seguintes:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} \ ; \qquad \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n .$$

2. Determine a natureza das séries numéricas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{4^n} \ , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2\, 2^n} \ ,$$

e calcule o valor da soma de uma delas.

3. Sejam A e B os subconjuntos de $\mathbb{R}$ definidos por

$$A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ |x-2| < x\} \qquad B = [-2, 2] \ .$$

(a) Mostre que $A =]1, +\infty[$.

(b) Determine caso existam, ou justifique que não existem, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de $A \cap B$.

II (6 val.)

Considere a função $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, contínua no ponto 0 e tal que

$$f(x) = \sqrt{x}\, \log(x), \ \ x > 0 \, .$$

(a) Calcule $f(0)$.

(b) Obtenha equações para as tangentes ao gráfico de f nos pontos com abcissa $x = 0$ e $x = 1$.

(c) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades e inflexões da função f.

(d) Esboce o gráfico de f e indique qual o seu contradomínio.

III (5 val.)

1. Considere a sucessão (x_n) definida por

$$x_1 = 0 \quad \text{e} \quad x_{n+1} = \sqrt{\frac{1+x_n^2}{2}}\,.$$

Mostre que (x_n) é monótona e limitada. Conclua que a sucessão é convergente e calcule o valor do seu limite.

2. Determine o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ onde a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^2+1}(2x-1)^n$$

é (i) absolutamente convergente, (ii) simplesmente convergente e (iii) divergente.

3. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $g(x) = 2x^2 - x + 1$, e $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $h(1) = 1$ e $h'(1) = -1$. Calcule $(h \circ g)'(0)$ e determine o polinómio de Mac-Laurin de primeiro grau de $(h \circ g)$.

IV (3 val.)

Uma função $h : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se *Lipschitziana* no seu domínio D se existir uma constante $K > 0$ tal que $|h(x) - h(y)| \leq K|x-y|\,,\ \forall x, y \in \mathbb{D}$.

(a) Mostre que se $h : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é Lipschitziana em D, então h é contínua em D.

(b) Mostre que se $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de classe C^1, i.e. diferenciável com derivada h' contínua em $\mathbb{R}$, então a restrição de h a qualquer intervalo $D = [a, b]$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$, é Lipschitziana nesse intervalo.

(c) Mostre com um exemplo que uma função pode ser Lipschitziana num intervalo $D = [a, b]$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$, sem que seja diferenciável em pelo menos um ponto do interior desse intervalo.