Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

2º EXAME DE ANÁLISE MATEMÁTICA I

CURSOS: Civil, Mecânica, Matemática, Física, Informática, Gestão, Território, Aeroespacial, Electricidade e Ambiente

2º Semestre 1999/2000

12 de Julho de 2000, 17.00 — Duração: 3 horas

I (6 val.)

1. Estude quanto à convergência em $\overline{\mathbb{R}}$ as sucessões seguintes:

$$\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1} \quad ; \qquad \left(2-\frac{n+1}{n}\right)^{2n+1} .$$

2. Determine a natureza das séries numéricas

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1} \quad , \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+1}{2^{2n}-1} \ ,$$

e calcule o valor da soma de uma delas.

3. Sejam A e B os subconjuntos de $\mathbb{R}$ definidos por

$$A=\left\{x\in\mathbb{R}\ :\ 1-x^2\leq 0\ \wedge\ 2-x>0\right\} \qquad B=[-2,2] .$$

(a) Mostre que $A=]-\infty,-1]\cup[1,2[$.

(b) Determine caso existam, ou justifique que não existem, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de $A\cap B$.

II (6 val.)

Considere a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=|x|e^{-x^2/2},\ x\in\mathbb{R} .$$

(a) Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

(b) Determine (justificando) os pontos $x\in\mathbb{R}$ onde f é diferenciável e calcule a sua derivada.

(c) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades e inflexões da função f.

(d) Esboce o gráfico de f e indique qual o seu contradomínio.

III (5 val.)

1. Considere a sucessão (x_n) definida por

$$x_1 = 1 \quad \text{e} \quad x_{n+1} = 2 - \frac{1}{1+x_n} \ .$$

Mostre que $1 \leq x_n \leq 2$ e que (x_n) é monótona. Conclua que a sucessão é convergente e calcule o valor do seu limite.

2. Determine o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ onde a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n} \, x^{2n}$$

é (i) absolutamente convergente, (ii) simplesmente convergente e (iii) divergente.

3. Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável com $h'(0) = 1$, e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $g(x) = h(\log(1 + x^2))$. Mostre que $g'(0) = 0$ e $g''(0) = 2$. Conclua que a função g tem um extremo local no ponto 0 e classifique-o.

IV (3 val.)

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável com derivada $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ estritamente crescente e satisfazendo

$$\lim_{x \to -\infty} f'(x) = -\infty \qquad , \qquad \lim_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty \ .$$

(a) Mostre que existe um único ponto $a \in \mathbb{R}$ tal que $f'(a) = 0$, e que $m \equiv f(a)$ é o mínimo absoluto de f.

(b) Dado qualquer valor $b \in]m, +\infty[$, mostre que o conjunto $f^{-1}(b)$ tem exactamente dois elementos.