Análise Matemática I

1º Teste

Campus da Alameda **30 de Novembro de 2002**

LEEC, LEC, LET, LCI, LEGI, LEN, LQ, LEQ, LEB, LEAmb, LEAero

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

I. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 1| \leq 1 + x\} \qquad B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \qquad C = \left\{2 - \frac{1}{k} : k \in \mathbb{N}_1\right\}.$$

a) Mostre que $A = \{-1\} \cup [0, 2]$.

b) Determine, se existirem, o supremo, ínfimo, máximo e mínimo dos conjuntos $A \cap B$ e C.

c) Decida se as seguintes proposições são verdadeiras ou falsas, justificando apropriadamente (demonstre ou dê um exemplo, conforme adequado).

i) Toda a sucessão limitada, de termos em B, tem limite.

ii) Existem sucessões $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de termos em A, convergentes, satisfazendo

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \;\; a_{n+1}\, a_n < 0.$$

iii) Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma qualquer sucessão divergente de termos em C. Então, existe sempre uma subsucessão de a_n que é convergente.

II. 1. Estude a natureza (convergência simples, absoluta ou divergência) das seguintes séries e calcule a soma de uma delas:

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^3 - 2n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2 + (-1)^n}{5}\right)^n$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \pi^{n/2}\, e^{-n}$ d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt[n]{(2n)!}$

2. Determine para que valores de $x \in \mathbb{R}$ a seguinte série de potências converge absolutamente, simplesmente ou diverge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, (2x)^n}{\sqrt{n} + 1}.$$

III. Sejam $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucessões de termos positivos, satisfazendo a condição

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \;\; |u_n - v_n| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Mostre que, se a série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge, então a série $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ também converge.