Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2020/2021

Curso: MEQ, MEAmbi

Ficha de Problemas nº 12

Equações Diferenciais Parciais

1 Exercícios Resolvidos

1. Mostrar que a função

$$u(x,t) = e^{mx}e^{-mt}$$

é uma solução da equação de calor

$$u_{xx} + mu_t = 0$$

para qualquer que seja o valor da constante m. Verificar que a função $g(x,t) = e^{-4t}\text{ch}\,(4x)$ é também solução da mesma equação, e que tal decorre do princípio da sobreposição.

Resolução:

Substituindo $u(t,x)$ na equação, obtém-se

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(e^{mx}e^{-mt}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{mx}e^{-mt}\right) = m^2e^{mx}e^{-mt} - m^2e^{mx}e^{-mt} = 0$$

como se queria mostrar. A função g pode ser escrita na forma

$$g(t,x) \;=\; e^{-4t}\,\frac{e^{4x}+e^{-4x}}{2} \;=\; \frac{1}{2}\,e^{4x}e^{-4t} \;+\; \frac{1}{2}\,e^{-4x}e^{-4t}$$

Dado que as funções $e^{4x}e^{-4t}$ e $e^{-4x}e^{-4t}$ são soluções da equação dada, $g(x,t)$ também o é pelo princípio da sobreposição.

2. Usar o método de separação de variáveis para determinar a solução dos seguintes problemas.

   (a) $u_t = u_y$ com $u(0,y) = e^y - 4e^{2y}$.

(b) $u = u(x,y)$, tal que $u_x = u_y - u$ com $u(x,0) = e^{-5x} + 2e^{-7x} - 14e^{13x}$.

Resolução:

(a) Usando o método de separação de variáveis, pretende-se determinar funções $u(t,y)$ verificando a equação diferencial. Note-se que:

- a equação é homogénea;
- a solução nula é solução da equação mas não verifica a condição inicial e, como tal, não é solução do problema. Mas ainda, esta condição (dita não homogéna) não pode ser incluida no problema a resolver por separação de variáveis.

Começamos por determinar funções não nulas, $T(t)$ e $Y(y)$, tais que $u(t,y) = T(t)Y(y)$ verifica a equação diferencial. Substituindo em $u_t = y_y$, obtém-se:

$$T'(t)Y(y) = T(t)Y'(y) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{Y'(y)}{Y(y)}$$

Dado que o primeiro membro é uma função apenas de t enquanto o segundo é uma função apenas de y, e que a igualdade se verifica para todos os (t,y) em $\mathbb{R}^2$, então ambos os membros são iguais a uma constante, $\lambda \in \mathbb{R}$. Desta forma,

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda \quad \text{e} \quad \frac{Y'(y)}{Y(y)} = \lambda,$$

ou seja,

$$T'(t) = \lambda T(t) \quad \text{e} \quad Y'(y) = \lambda Y(y)$$

Trata-se de equações diferenciais ordinárias facilmente resolúveis, pois ambas são lineares homogéneas de primeira ordem. Assim

$$T(t) = c_1 e^{\lambda t} \quad \text{e} \quad Y(y) = c_2 e^{\lambda y},$$

pelo que

$$u(t,y) = ce^{\lambda(t+y)}, \qquad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{1}$$

A resolução anterior não introduziu qualquer restrição aos valores de λ, pois para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$ se obtêm soluções não nulas da forma (1).

Vamos agora determinar os valores das constantes c e λ de modo a que a condição inicial se verifique. Observa-se que os dados iniciais,

$$u(0,y) = e^y - 4e^{2y}$$

são uma combinação linear (em $t = 0$, obviamente) de funções do tipo (1) correspondentes aos valores $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$. Assim sendo, a solução do problema de valor inicial deve ter a forma:

$$u(t,y) \; = \; c_1 e^{t+y} + c_2 e^{2(t+y)}.$$

Utilizando os dados iniciais para determinar c_1 e c_2, obtém-se:

$$u(0,y) = c_1 e^y + c_2 e^{2y} = e^y - 4e^{2y} \quad \forall y \in \mathbb{R} \qquad \Rightarrow \qquad c_1 = 1 \text{ e } c_2 = -4.$$

A solução do problema dado é, pois:

$$u(t,y) \;=\; e^{t+y} - 4e^{2(t+y)}.$$

(b) Usando o método de separação de variáveis, pretende-se determinar funções $u(x,y)$ verificando a equação diferencial. Note-se que:

- a equação é homogénea;
- a solução nula é solução da equação mas não verifica a condição inicial (em $y=0$) e, como tal, não é solução do problema. Mas ainda, esta condição (que é não homogéna) não pode ser incluida no problema a resolver por separação de variáveis.

Começamos por determinar funções não nulas, $X(x)$ e $Y(y)$, tais que $u(x,y) = X(x)Y(y)$ verifica a equação diferencial. Substituindo em $u_x = u_y - u$, obtém-se:

$$X'(x)Y(y) = X(x)Y'(y) - X(x)Y(y) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{X'(x)}{X(x)} = \frac{Y'(y)}{Y(y)} - 1$$

Dado que o primeiro membro é uma função apenas de x, enquanto o segundo é uma função apenas de y, e que a igualdade se verifica para todo o (x,y) em $\mathbb{R}^2$, então ambos os membros são iguais a uma constante, $\lambda \in \mathbb{R}$. Desta forma, tem-se que

$$\frac{X'(x)}{X(x)} = \lambda \quad \text{e} \quad \frac{Y'(y)}{Y(y)} - 1 = \lambda$$

Resolvendo ambas as equações (que são equações ordinárias lineares de primeira ordem lineares, ambas homogéneas) obtém-se

$$X(x) = c_1 e^{\lambda x}$$

e

$$\frac{Y'(y)}{Y(y)} = \lambda + 1 \quad \Leftrightarrow \quad Y(y) = c_2 e^{(\lambda+1)y}$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Assim, qualquer função da forma

$$u(x,y) = ce^{\lambda x} e^{(\lambda+1)y}, \qquad \text{com } c \in \mathbb{R},\ \lambda \in \mathbb{R} \tag{2}$$

é solução da equação diferencial.

Vamos agora calcular as constantes de modo a que a condição inicial se verifique. Observa-se que os dados na fronteira

$$u(x,0) = e^{-5x} + 2e^{-7x} - 14e^{13x}$$

são uma combinação linear (em $y=0$, obviamente) de funções do tipo (2) correspondentes aos valores $\lambda = -5$, $\lambda = -7$ e $\lambda = 13$. Assim sendo, a solução do problema de valor inicial deve ter a forma:

$$u(x,y) \;=\; c_1 e^{-5x} e^{-4y} + c_2 e^{-7x} e^{-6y} + c_3 e^{13x} e^{14y}.$$

Utilizando os dados iniciais para determinar c_1, c_2 e c_3, obtém-se:

$$u(x,0) = c_1 e^{-5x} + c_2 e^{-7x} + c_3 e^{13x} = e^{-5x} + 2e^{-7x} - 14e^{13x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

pelo que $c_1 = 1$, $c_2 = 2$ e $c_3 = -14$. Concluimos então que

$$u(t,y) \;=\; e^{-5x}e^{-4y} + 2e^{-7x}e^{-6y} - 14e^{13x}e^{14y}$$

é solução do problema dado.

3. Determinar os valores próprios e as funções próprias dos seguintes problemas de valor de fronteira (PVF).

   (a) $y'' - \lambda y = 0$ com $y'(0) = 0$, $y(L) = 0$

   (b) $y'' - 2y' + (1+\lambda)y = 0$ com $y\,(0) = 0$ e $y\,(1) = 0$.

Resolução:

(a) Vamos, em primeiro lugar, determinar a solução geral da equação diferencial. Utilizando a notação $Dy = y'$, a equação toma a forma:

$$y'' - \lambda y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^2 - \lambda)y = 0.$$

O polinómio característico associado é, pois, $P(R) = R^2 - \lambda$. Vamos, então, considerar os três casos que se seguem.

Caso 1: $\lambda = 0$**.** O polinómio característico tem 0 como raiz dupla, pelo que a equação $D^2 y = 0$ admite como base do espaço de soluções (por exemplo) $\mathcal{B} = \{1,\, x\}$. Desta forma, a solução geral da equação é

$$y(x) = a + bx, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Utilizando as condições de fronteira para determinar as constantes a e b:

$$\begin{aligned} y'(0) &= 0 \quad \Rightarrow \quad (a+bx)'\Big|_{x=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0 \\ y(L) &= 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0 \end{aligned}$$

Conclui-se que a única solução do PVF no caso $\lambda = 0$ é a solução nula, pelo que $\lambda = 0$ não é valor próprio do problema.

Caso 2: $\lambda > 0$**.** O polinómio característico tem como raízes (ambas de multiplicidade 1) $\pm\mu$, onde $\mu \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\lambda}$. Assim sendo, a equação $(D^2 - \mu^2)y = (D-\mu)(D+\mu)y = 0$ admite como base do espaço de soluções $\mathcal{B} = \{e^{\mu x},\, e^{-\mu x}\}$, pelo que a sua solução geral é dada por

$$y(x) = ae^{\mu x} + be^{-\mu x}, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Utilizando as condições de fronteira para determinar as constantes a e b:

$$y'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad (ae^{\mu x} + be^{-\mu x})'\Big|_{x=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu(a-b) = 0 \quad \Rightarrow \quad b = a$$

$$y(L) = 0 \quad \Rightarrow \quad a\big(\underbrace{e^{\mu L} + e^{-\mu L}}_{>0}\big) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$$

Tem-se então que $a = b = 0$, donde se conclui que a única solução do PVF no caso $\lambda > 0$ é a solução nula. Desta forma, qualquer que seja $\lambda > 0$, λ não é valor próprio do problema.

Caso 3: $\lambda < 0$ As raízes do polinómio característico são os números complexos conjugados

$$\pm i\sqrt{-\lambda} = \pm i\mu, \qquad \text{onde } \ \mu = \sqrt{-\lambda} > 0, \ \ \lambda = -\mu^2$$

Desta forma, a equação diferencial $(D^2+\mu^2)y = (D+\mu)(D+\mu)y = 0$ admite como base do espaço de soluções $\mathcal{B} = \{\text{sen}\,(\mu x),\, \cos\,(\mu x)\}$, pelo que a sua solução geral é dada por

$$y(x) = a\text{sen}\,(\mu x) + b\cos\,(\mu x), \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Utilizando as condições de fronteira para determinar as constantes a e b:

$$y'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \big(a\text{sen}\,(\mu x) + b\cos\,(\mu x)\big)'\Big|_{x=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$$

$$y(L) = 0 \quad \Rightarrow \quad b\cos\,(\mu L) = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0 \ \vee \ \cos\,(\mu L) = 0$$

As soluções não nulas não podem verificar $a = b = 0$, pelo que é necessário que

$$\cos\,(\mu L) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu L = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{\pi}{2L} + \frac{n\pi}{L} = \frac{(1+2n)\pi}{2L}$$

com $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ (note que $\mu > 0$). Como b pode então ser um número real arbitrário, obtêm-se as seguintes soluções não nulas do PVF:

$$y(x) = b\cos\frac{(1+2n)\pi x}{2L}, \qquad \text{com } \ n \in \mathbb{N}_0.$$

Para $\mu L \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \ \forall n \in \mathbb{N}_0$ então obrigatoriamente $b = a = 0$, pelo que a única solução existente, nesses casos, é a solução nula.

Podemos então concluir que os valores próprios do problema são

$$\lambda_n = -\frac{(1+2n)^2\pi^2}{4L^2}, \qquad \text{com } \ n \in \mathbb{N}_0,$$

sendo o espaço das funções próprias associadas a este λ_n gerado pela (única) função:

$$y_n(x) = \cos\frac{(1+2n)\pi x}{2L}.$$

(b) A equação característica associada é

$$R^2 - 2R + (1+\lambda) = 0 \;\Leftrightarrow\; R = 1 \pm \sqrt{-\lambda}$$

Separamos o estudo das soluções em três casos, dependendo do tipo de raízes encontradas.

Caso 1: $\lambda = 0$**.** O polinómio característico tem uma raiz $R = 1$ de multiplicidade 2, pelo que a solução da equação diferencial será

$$y(x) = Ae^x + Bxe^x, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Usando as condições de fronteira para determinar A e B, tem-se que

$$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0 \quad \Rightarrow \quad y(x) = Bxe^x$$

$$y(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad Be = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0$$

Resulta que as únicas soluções do problema são nulas, pelo que $\lambda = 0$ não é valor próprio.

Caso 2: $\lambda < 0$**.** Seja $\omega = \sqrt{-\lambda} \geq 0$, o que implica que $\lambda = -\omega^2$. O polinómio característico tem duas raízes reais distintas, $R = 1 \pm \omega$, pelo que a solução geral da equação diferencial será

$$y(x) = Ae^{(1+\omega)x} + Be^{(1-\omega)x} = e^x\Big(Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}\Big)$$

Usando as condições de fronteira para determinar A e B, tem-se que

$$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A + B = 0 \quad \Rightarrow \quad B = -A \quad \Rightarrow \quad y(x) = Ae^x\big(e^{\omega x} - e^{-\omega x}\big)$$

$$y(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad A\big(\underbrace{e^{\omega} - e^{-\omega}}_{>0}\big) = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0 \quad \Rightarrow \quad B = -A = 0$$

Resulta pois que as únicas soluções do problema são nulas, pelo que $\lambda = 0$ não é valor próprio do problema.

Caso 3: $\lambda > 0$ Seja $\omega = \sqrt{\lambda} > 0$, o que implica que $\lambda = \omega^2$. O polinómio característico tem duas raízes complexas conjugadas, $R = 1 \pm i\omega$, pelo que a solução geral da equação diferencial será

$$y(x) = Ae^x \operatorname{sen}(\omega x) + Be^x \cos(\omega x)$$

Para verificar as condições de fronteira, tem-se que

$$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0 \quad \Rightarrow \quad y(x) = Ae^x \operatorname{sen}(\omega x)$$

$$y(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad A\, e \operatorname{sen} \omega = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0 \;\vee\; \omega = n\pi, \;\; n \in \mathbb{N}.$$

(note que $\omega > 0$). Para cada $\lambda = \omega^2 = n^2\pi^2$ obtêm-se as soluções não nulas

$$y(x) \;=\; A\, e^x \operatorname{sen}(n\pi x).$$

Podemos então concluir que os valores própios do problema são

$$\lambda_n = n^2\pi^2, \qquad \text{para} \;\; n \in \mathbb{N},$$

sendo o espaço das funções próprias associado a este valor próprio gerado pela função

$$y_n(x) \;=\; e^x \operatorname{sen}(n\pi x).$$

4. Considerar o problema de valores de fronteira

$$y'' + \lambda y = f(t) \quad , \quad y(0) = y(1) = 0 \tag{3}$$

(a) Mostre que se λ for um valor próprio do problema homogéneo, então o problema proposto

(1) pode não ter solução

(2) a solução (quando existe) não é única;

(b) Mostrar que este problema tem uma só solução $y(t)$ se λ não é um valor próprio do problema homogéneo.

Resolução:

Os valores próprios e funções próprias para o problema de Dirichlet homogéneo,

$$\begin{cases} (D^2+\lambda)y = 0, & \text{para } \ 0 < x < 1 \\ y(0) = y(1) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

podem-se obter substituindo λ por $-\lambda$ no problema de valores próprios com condições de fronteira de Dirichlet (resolvido na aula). Resulta assim que os mesmos são:

$$\begin{cases} \lambda_n = n^2\pi^2 \\ y_n(t) = \text{sen}\,(n\pi t) \end{cases} \qquad \text{para } \ n \in \mathbb{N}.$$

(a) Conforme a hipótese, admitimos que $\lambda = p^2\pi^2$, para algum $p \in \mathbb{N}$. Multiplicando ambos os membros da equação diferencial pela função própria associada a λ, $y_p(t) = \text{sen}\,(p\pi t)$, e integrando entre 0 e 1, obtém-se:

$$\int_0^1 y''(s)\text{sen}\,(p\pi s)\,ds + \lambda \int_0^1 y(s)\text{sen}\,(p\pi s)\,ds = \int_0^1 f(s)\text{sen}\,(p\pi s)\,ds$$

Integrando por partes o primeiro integral, e tendo em conta que $\text{sen}\,(p\pi) = \text{sen}\,0 = 0$ e $y(0) = y(1) = 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 y''(s)\text{sen}\,(p\pi s)\,ds &= \underbrace{y'(s)\text{sen}\,(p\pi s)\Big|_0^1}_{=0} - p\pi \int_0^1 y'(s)\cos\,(p\pi s)\,ds \\ &= \underbrace{-y(s)\cos\,(p\pi s)\Big|_0^1}_{=0} - p^2\pi^2 \int_0^1 y(s)\text{sen}\,(p\pi s)\,ds \\ &= -\lambda \int_0^1 y(s)\text{sen}\,(p\pi s)\,ds \end{aligned}$$

Desta forma, se $y(t)$ for solução do problema então tem-se necessariamente que

$$\int_0^1 f(s)\text{sen}\,(p\pi s)\,ds = 0 \tag{5}$$

Em conclusão, se $\lambda = p\pi$ para certo $p \in \mathbb{N}$:

(1) Se f não verificar a condição (5), então o problema não tem solução.

(2) Se f verificar a condição (5), e admitindo que existe uma solução, $y(t)$, do problema, então o leitor pode facilmente verificar que qualquer função da forma

$$y(t) + c\,\text{sen}\,(p\pi t), \qquad \text{com} \quad c \in \mathbb{R},$$

é solução do problema.

(b) Vamos procurar uma solução do problema (3) na forma de uma sobreposição de funções próprias do problema homogéneo:

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}\,(n\pi t). \tag{6}$$

De facto, trata-se da representação em série de senos de y no intervalo $[0, 1]$. Fazendo o mesmo com o termo não homogéneo,

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{sen}\,(n\pi t),$$

e substituindo na equação diferencial, obtém-se

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-n^2\pi^2 + \lambda)b_n \text{sen}\,(n\pi t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{sen}\,(n\pi t)$$

Temos então que

$$b_n = \frac{f_n}{\lambda - n^2\pi^2} \tag{7}$$

Note que esta solução está bem definida desde que λ não seja um dos valores próprios. Também é necessário que a série defina uma função de classe C^2. Não iremos aqui discutir este problema; apenas notamos que se f for de classe C^1 então a série (6) com os coeficientes (7) pode ser derivada termo a termo pelo menos duas vezes. E isso justifica o cálculo, acima efectuado, da solução do problema.

Quanto à unicidade, suponhamos que y_1 e y_2 são duas soluções do problema. Então $y(t) = y_1(t) - y_2(t)$ satisfaz o problema homogéneo associado (4). Mas como λ não é valor próprio, a única solução do problema homogéneo é $y(t) \equiv 0$. Resulta assim que $y_1 = y_2$.

5. Determine a solução do seguinte problema de valor inicial e condição na fronteira:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \quad , \qquad x \in (0,\pi) \text{ e } t > 0$$

verificando as condiçãoes de fronteira

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$

e a condição inicial

$$u(x,0) = \text{ sen}\,(x) - 2 \text{ sen}\,(5x).$$

Resolução:

Para resolver o problema de valores na fronteira, utilizaremos o método de separação de variáveis. Assim, considerando $u(t,x) = T(t)X(x)$ e substituindo na equação, obteremos

$$T'(t)X(x) = \alpha^2 T(t)X''(x) \ \Rightarrow \ \frac{T'}{\alpha^2 T} = \frac{X''}{X}$$

Sendo o primeiro membro da equação uma função de t e o segundo membro uma função de x, para que a igualdade se verifique para todo $t > 0$ e $x \in]0,\pi[$, tem de existir $\lambda \in \mathbb{R}$ para o qual

$$\frac{T'}{\alpha^2 T} = \lambda \quad \text{e} \quad \frac{X''}{X} = \lambda$$

Por outro lado, analisando as condições de fronteira

$$u(t,0) = 0 \ \Rightarrow \ T(t)X(0) = 0 \ \Rightarrow \ T(t) \equiv 0 \text{ ou } X(0) = 0$$

dado que $T(t)$ não pode ser a função nula

$$u(t,0) = 0 \ \Rightarrow \ X(0) = 0$$

Do mesmo modo

$$u(t,\pi) = 0 \ \Rightarrow \ X(\pi) = 0$$

Temos assim dois problemas para resolver:

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 & \text{se } \ x \in]0,\pi[\\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases} \tag{8}$$

e

$$T' = (\alpha^2 \lambda)T \tag{9}$$

Para resolver (8), temos que procurar os valore e funções próprias associadas. O polinómio caracterítico associado é

$$R^2 - \lambda = 0 \ \Leftrightarrow \ R = \pm\sqrt{\lambda}$$

Existem então três possibilidades:

$\lambda = 0$ A equação característica tem uma solução $R = 0$ de multiplicidade 2, pelo que a solução da equação diferencial será

$$y(x) = A + Bx$$

Para verificar as condições de fronteira, tem-se que

$$y(0) = 0 \;\Rightarrow\; A = 0 \;\Rightarrow\; y(x) = Bx$$

Por outro lado

$$y(\pi) = 0 \;\Rightarrow\; B\pi = 0 \;\Rightarrow\; y(x) = 0\;\forall x$$

pelo que $\lambda = 0$ não é valor próprio.

$\lambda > 0$ $(\lambda = \mu^2)$ A equação característica tem duas soluções reais distintas $R = \pm\mu$, pelo que a solução da equação diferencial será

$$y(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$$

Para verificar as condições de fronteira, tem-se que

$$y(0) = 0 \;\Rightarrow\; A + B = 0 \;\Rightarrow\; B = -A \;\Rightarrow\; y(x) = A\Big(e^{\mu x} - e^{-\mu x}\Big)$$

Por outro lado

$$y(\pi) = 0 \;\Rightarrow\; A(e^{\mu\pi} - e^{-\mu\pi}) = 0 \;\Rightarrow\; B = 0 \text{ ou } \mu = -\mu \;\Rightarrow\; A = 0 \;\Rightarrow\; y(x) = 0\;\forall x$$

pelo que qualquer $\lambda > 0$ não é valor próprio.

$\lambda < 0$ $(\lambda = -\mu^2)$ A equação característica tem duas soluções complexas conjugadas $R = \pm i\mu$, pelo que a solução da equação diferencial será

$$y(x) = A\,\mathrm{sen}\,(\mu x) + B\cos(\mu x)$$

Para verificar as condições de fronteira, tem-se que

$$y(0) = 0 \;\Rightarrow\; B = 0 \;\Rightarrow\; y(x) = A\,\mathrm{sen}\,(\mu x)$$

Por outro lado

$$y(\pi) = 0 \;\Rightarrow\; A\,\mathrm{sen}\,\pi\mu = 0 \;\Rightarrow\; A = 0 \text{ ou } \pi\mu = k\pi\; k \in \mathbb{N}$$

tem-se então que para cada $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_k = -k^2$ é valor próprio da equação associado à função própria $X_k(x) = B_k\mathrm{sen}\,(kx)$.

Podemos agora resolver (9), apenas para os valores de λ encontrados anteriormente (pois para outros valores de λ a solução de (8) é a solução nula que não nos interessa.). Assim, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$T'(t) = -\alpha^2 k^2 T \;\Rightarrow\; T_k(t) = C_k e^{-\alpha^2 k^2 t}$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, a função

$$u_k(t,x) = T_k(t)X_k(x) = A_k e^{-\alpha^2 k^2 t}\mathrm{sen}\,(kx)$$

é solução do problema de valores na fronteira, e consequentemente qualquer combinação linear tambem o será, ou seja

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty} A_k e^{-\alpha^2 k^2 t}\text{sen}\,(kx)$$

Para calcular as constantes A_k utilizaremos a condição inicial

$$u(0,x)=\text{sen}\,x-2\text{sen}\,(5x)$$

Assim

$$u(0,x)=\sum_{n=1}^{\infty} A_k\text{sen}\,(kx)=\text{sen}\,x-2\text{sen}\,(5x)$$

Facilmente se verifica que

$$A_k=\begin{cases}1 & \text{se } \ k=1\\ -2 & \text{se } \ k=5\\ 0 & \text{se } \ k\neq 1\ ,\ k\neq 5\end{cases}$$

pelo que a solução do problema de valor inicial e valores na fronteira é

$$u(t,x)=e^{-\alpha^2 t}\text{sen}\,(x)-2e^{-25\alpha^2 t}\text{sen}\,(5x)$$

6. (a) Recorrendo ao método de separação de variáveis, determine as soluções para $t\geqslant 0$ e para $x\in[0,1]$ de

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+u & \text{se } \ x\in]0,1[\\ u(0,t)=0 & \text{se } \ t>0\\ u(1,t)=\text{sen}\,1 & \text{se } \ t>0\end{cases}$$

b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial

$$u(x,0)=3\text{sen}\,(2\pi x)-7\text{sen}\,(4\pi x)+\text{sen}\,(x)\ .$$

Resolução:

(a) Dado que as condições de fronteira não são homogéneas, teremos que considerar

$$u(t,x)=v(x)+w(t,x)$$

em que $v(x)$ é a solução do problema

$$\begin{cases}0=v''(x)+v(x) & \text{se } \ x\in]0,1[\\ v(0)=0 \\ v(1)=\text{sen}\,1\end{cases}\tag{10}$$

e $w(t,x)$ é solução do problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + w \quad \text{se } \; x \in]0,1[\\ w(t,0) = 0 \\ w(t,1) = 0 \end{cases} \tag{11}$$

Começemos por resolver o problema (10). Trata-se de uma equação ordinária linear de coeficientes constantes, de equação característica

$$R^2 + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; R = \pm i$$

pelo que a solução geral da equação é

$$v(x) = A\cos x + B\operatorname{sen} x$$

Dado que $v(0) = 0$, tem-se que $A = 0$, pelo que $v(x) = B\operatorname{sen} x$. Por outro lado, dado que $v(1) = \operatorname{sen} 1$ tem-se $A = 1$ e

$$v(x) = \operatorname{sen} x$$

Para resolver o problema (11) utilizaremos o método de separação de variáveis. Assim, considerando $w(t,x) = T(t)X(x)$ e substituindo na equação, obteremos

$$T'(t)X(x) = T(t)X''(x) + T(t)X(x) \;\Rightarrow\; \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} + 1$$

Sendo o primeiro membro da equação uma função de t e o segundo membro uma função de x, para que a igualdade se verifique para todo $t > 0$ e $x \in]0,1[$, tem de existir $\lambda \in \mathbb{R}$ para o qual

$$\frac{T'}{T} - 1 = \lambda \quad \text{e} \quad \frac{X''}{X} = \lambda$$

Por outro lado, analisando as condições de fronteira

$$w(t,0) = 0 \;\Rightarrow\; T(t)X(0) = 0 \;\Rightarrow\; T(t) \equiv 0 \text{ ou } X(0) = 0$$

dado que $T(t)$ não pode ser a função nula

$$w(t,0) = 0 \;\Rightarrow\; X(0) = 0$$

Do mesmo modo

$$w(t,1) = 0 \;\Rightarrow\; X(1) = 0$$

Temos assim dois problemas para resolver:

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \qquad \text{se } \; x \in]0,1[\\ X(0) = X(1) = 0 \end{cases} \tag{12}$$

e

$$T' = (1+\lambda)T \tag{13}$$

Para resolver (12), temos que procurar os valores e funções próprias associadas. O polinómio caracterítico associado é

$$R^2 - \lambda = 0 \;\Leftrightarrow\; R = \pm\sqrt{\lambda}$$

Existem então três possibilidades:

$\lambda = 0$ A equação característica tem uma solução $R = 0$ de multiplicidade 2, pelo que a solução da equação diferencial será

$$y(x) = A + Bx$$

Para verificar as condições de fronteira, tem-se que

$$y(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow y(x) = Bx$$

Por outro lado

$$y(1) = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow y(x) = 0\ \forall x$$

pelo que $\lambda = 0$ não é valor próprio.

$\lambda > 0$ ($\lambda = \mu^2$) A equação característica tem duas soluções reais distintas $R = \pm\mu$, pelo que a solução da equação diferencial será

$$y(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$$

Para verificar as condições de fronteira, tem-se que

$$y(0) = 0 \Rightarrow A + B = 0 \Rightarrow B = -A \Rightarrow y(x) = A\Big(e^{\mu x} - e^{-\mu x}\Big)$$

Por outro lado

$$y(1) = 0 \Rightarrow A(e^{\mu} - e^{-\mu}) = 0 \Rightarrow B = 0 \text{ ou } \mu = -\mu \Rightarrow A = 0 \Rightarrow y(x) = 0\ \forall x$$

pelo que qualquer $\lambda > 0$ não é valor próprio.

$\lambda < 0$ ($\lambda = -\mu^2$) A equação característica tem duas soluções complexas conjugadas $R = \pm i\mu$, pelo que a solução da equação diferencial será

$$y(x) = A\mathsf{sen}\,(\mu x) + B\mathsf{cos}\,(\mu x)$$

Para verificar as condições de fronteira, tem-se que

$$y(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow y(x) = A\mathsf{sen}\,(\mu x)$$

Por outro lado

$$y(1) = 0 \Rightarrow A\mathsf{sen}\,\mu = 0 \Rightarrow B = 0 \text{ ou } \mu = k\pi\ k \in \mathbb{N}$$

tem-se então que para cada $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_k = -k^2\pi^2$ é valor próprio da equação associado à função própria $X_k(x) = B_k\mathsf{sen}\,(k\pi x)$.

Podemos agora resolver (13), apenas para os valores de λ encontrados anteriormente (pois para outros valores de λ a solução de (12) é a solução nula que não nos interessa.). Assim, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$T'(t) = (1 - k^2\pi^2)T \Leftarrow T_k(t) = C_k e^{(1-k^2\pi^2)t}$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, a função

$$w_k(t, x) = T_k(t)X_k(x) = A_k e^{(1-k^2\pi^2)t}\mathsf{sen}\,(k\pi x)$$

é solução do problema de valores na fronteira (11), e consequentemente qualquer combinação linear tambem o será, ou seja

$$w(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_k e^{(1-k^2\pi^2)t} \text{sen}\,(k\pi x)$$

Finalmente

$$u(t,x) = v(x) + w(t,x) = \text{sen}\,x + \sum_{n=1}^{\infty} A_k e^{(1-k^2\pi^2)t} \text{sen}\,(k\pi x)$$

é a solução pedida.

(b) Pela alínea anterior

$$u(0,x) = \text{sen}\,x + \sum_{n=1}^{\infty} A_k \text{sen}\,(k\pi x) = 3\text{sen}\,(2\pi x) - 7\text{sen}\,(4\pi x) + \text{sen}\,(x)$$

pelo que teremos que determinar os coeficientes A_k de modo a que

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_k \text{sen}\,(k\pi x) = 3\text{sen}\,(2\pi x) - 7\text{sen}\,(4\pi x)$$

Facilmente se verifica que

$$A_k = \begin{cases} 3 & \text{se } \; k = 2 \\ -7 & \text{se } \; k = 4 \\ 0 & \text{se } \; k \neq 2 \;,\; k \neq 4 \end{cases}$$

pelo que a solução do problema de valor inicial e valore na fronteira é

$$u(t,x) = \text{sen}\,x + 3e^{(1-4\pi^2)t} \text{sen}\,(2\pi x) - 7e^{(1-16\pi^2)t} \text{sen}\,(4\pi x)$$

7. Determine a solução dos seguinte problema de valor inicial e condição na fronteira:

$$u_t = u_{xx} - u, \;\; x \in (0,L), \;\; \text{com} \begin{cases} u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 \\ u(x,0) = \cos\,(3\pi x/L). \end{cases}$$

Resolução:

Para resolver o problema de valores na fronteira, utilizaremos o método de separação de variáveis. Assim, considerando $u(t,x) = T(t)X(x)$ e substituindo na equação, obteremos

$$T'(t)X(x) = T(t)X''(x) - T(t)X(x) \;\; \Rightarrow \;\; \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} - 1$$

Sendo o primeiro membro da equação uma função de t e o segundo membro uma função de x, para que a igualdade se verifique para todo $t > 0$ e $x \in]0, \pi[$, tem de existir $\lambda \in \mathbb{R}$ para o qual

$$\frac{T'}{T} + 1 = \lambda \quad \text{e} \quad \frac{X''}{X} = \lambda$$

Por outro lado, analisando as condições de fronteira

$$u_x(t, 0) = 0 \;\Rightarrow\; T(t)X'(0) = 0 \;\Rightarrow\; T(t) \equiv 0 \text{ ou } X'(0) = 0$$

dado que $T(t)$ não pode ser a função nula

$$u(t, 0) = 0 \;\Rightarrow\; X'(0) = 0$$

Do mesmo modo

$$u_x(t, L) = 0 \;\Rightarrow\; X'(L) = 0$$

Temos assim dois problemas para resolver:

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 & \text{se } x \in]0, L[\\ X'(0) = X'(L) = 0 \end{cases} \tag{14}$$

e

$$T' = (\lambda - 1)T \tag{15}$$

Para resolver (14), temos que procurar os valores e funções próprias associadas. O polinómio caracterítico associado é

$$R^2 - \lambda = 0 \;\Leftrightarrow\; R = \pm\sqrt{\lambda}$$

Existem então três possibilidades:

$\lambda = 0$ A equação característica tem uma solução $R = 0$ de multiplicidade 2, pelo que a solução da equação diferencial será

$$y(x) = A + Bx \;\Rightarrow\; y'(x) = B$$

Para verificar as condições de fronteira, tem-se que

$$y'(0) = 0 \;\Rightarrow\; B = 0 \;\Rightarrow\; y(x) = A \;\Rightarrow\; y(x) = 0$$

Por outro lado $y'(L) = 0$ verifica-se qualquer que seja A pelo que $\lambda = 0$ é valor próprio associado à função própria $X_0(x) = A_0$.

$\lambda > 0$ $(\lambda = \mu^2)$ A equação característica tem duas soluções reais distintas $R = \pm\mu$, pelo que a solução da equação diferencial será

$$y(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x} \;\Rightarrow\; y'(x) = \mu\Big(Ae^{\mu x} - Be^{-\mu x}\Big)$$

Para verificar as condições de fronteira, tem-se que

$$y'(0) = 0 \;\Rightarrow\; A - B = 0 \;\Rightarrow\; B = A \;\Rightarrow\; y(x) = A\Big(e^{\mu x} + e^{-\mu x}\Big)$$

Por outro lado

$$y'(L) = 0 \;\Rightarrow\; A(e^{\mu L} - e^{-\mu L}) = 0 \;\Rightarrow\; B = 0 \text{ ou } \mu = -\mu \;\Rightarrow\; A = 0 \;\Rightarrow\; y(x) = 0\; \forall x$$

pelo que qualquer $\lambda > 0$ não é valor próprio.

$\lambda < 0$ $(\lambda = -\mu^2)$ A equação característica tem duas soluções complexas conjugadas $R = \pm i\mu$, pelo que a solução da equação diferencial será

$$y(x) = A\text{sen}\,(\mu x) + B\text{cos}\,(\mu x) \;\Rightarrow\; y'(x) = \mu\Big(A\text{cos}\,(\mu x) - B\text{sen}\,(\mu x)\Big)$$

Para verificar as condições de fronteira, tem-se que

$$y'(0) = 0 \;\Rightarrow\; A = 0 \;\Rightarrow\; y(x) = B\text{cos}\,(\mu x)$$

Por outro lado

$$y'(L) = 0 \;\Rightarrow\; -B\mu\text{sen}\,L\mu = 0 \;\Rightarrow\; B = 0 \text{ ou } L\mu = k\pi \;k \in \mathbb{N}$$

tem-se então que para cada $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_k = -\frac{k^2\pi^2}{L^2}$ é valor próprio da equação associado à função própria $X_k(x) = B_k\text{cos}\,(\frac{k\pi}{L}x)$.

Podemos agora resolver (15), apenas para os valores de λ encontrados anteriormente (pois para outros valores de λ a solução de (14) é a solução nula que não nos interessa.). Assim, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$T'(t) = (-\frac{\pi^2k^2}{L^2} - 1)T \;\Leftarrow\; T_k(t) = C_k e^{(-\frac{\pi^2k^2}{L^2}-1)t}$$

e para $\lambda = 0$

$$T'(t) = -T(t) \;\Leftarrow\; T_0(t) = C_0e^{-t}$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, a função

$$u_k(t,x) = T_k(t)X_k(x) = A_k e^{(-\frac{\pi^2k^2}{L^2}-1)t}\text{cos}\,(\frac{k\pi}{L}x)$$

é solução do problema de valores na fronteira, assim como

$$u_0(t,x) = A_0e^{-t}$$

Consequentemente qualquer combinação linear tambem o será, ou seja

$$u(t,x) = A_0e^{-t} + \sum_{n=1}^{\infty} A_k e^{(-\frac{\pi^2k^2}{L^2}-1)t}\text{cos}\,(\frac{k\pi}{L}x)$$

Para calcular as constantes A_k, $k \in \mathbb{N}_0$ utilizaremos a condição inicial

$$u(0,x) = \text{cos}\,(\frac{3\pi x}{L}$$

Assim

$$u(0,x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_k\text{cos}\,(\frac{k\pi}{L}x) = \text{cos}\,(\frac{3\pi x}{L}$$

Facilmente se verifica que

$$A_k = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 3 \\ 0 & \text{se } k \neq 3 \end{cases}$$

pelo que a solução do problema de valor inicial e valores na fronteira é

$$u(t,x) = e^{(-\frac{9\pi^2}{L^2}-1)t}\text{cos}\,(\frac{3\pi}{L}x)$$

8. A equação de calor no espaço bidimensional é dada por

$$u_t = \alpha^2(u_{xx} + u_{yy})$$

(a) Supondo que $u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$, determinar as equações diferenciais ordinárias que devem ser satisfeitas por X, Y e T

(b) Determinar soluções $u(x, y, t)$ da equação diferencial que satisfaçam as condições de fronteira

$$u(0, y, t) = 0 \quad , \quad u(a, y, t) = 0 \quad , \quad u(x, 0, t) = 0 \quad , \quad u(x, b, t) = 0.$$

Resolução:

(a) Vamos encontrar soluções não nulas da equação do calor biodimensional da forma indicada. Substituindo na equação obtém-se

$$T'(t)X(x)Y(y) = \alpha^2\big(T(t)X''(x)Y(y) + T(t)X(x)Y''(y)\big)$$

ou seja

$$\frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} = \frac{X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y)}{X(x)Y(y)}$$

Atendendo a que o primeiro membro é uma função de t e o segundo membro uma função de (x, y), a única forma de a igualdade se verificar para todos os t, x e y é que ambas sejam igual a uma constante, Assim, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} = \lambda \qquad \text{e} \qquad \frac{X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y)}{X(x)Y(y)} = \lambda$$

Repetindo o procedimento com a equação em (x, y)

$$\frac{X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y)}{X(x)Y(y)} = \lambda \quad \Leftrightarrow \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} + \lambda$$

O primeiro membro é uma função de x e o segundo membro uma função de y, a única forma de a igualdade se verificar para todos os x e y é que ambas sejam igual a uma constante. Assim, para todo $\nu \in \mathbb{R}$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \nu \quad \text{e} \quad \frac{Y''(y)}{Y(y)} - \lambda = -\nu$$

Tem-se então que as equações ordinárias que as funções $T(t)$, $X(x)$ e $Y(y)$ verificam são (por exemplo)

$$T'(t) = \lambda\alpha^2 T(t) \quad , \quad X''(x) = \nu X(x) \quad , \quad Y''(y) = (\lambda - \nu)Y(y)$$

para λ e ν constantes reais.

(b) Começando pelas condições de fronteira em $x = 0$ e $x = a$:

$$u(0, y, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad T(t)X(0)Y(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad T(t) \equiv 0 \ \vee \ X(0) = 0 \ \vee \ Y(y) \equiv 0$$

Dado que as opções $T(t) \equiv 0$ e $Y(y) \equiv 0$ impicam que a solução $u(t,x,y) \equiv 0$ (não verica a condição inicial $u(0,x,y) = f(x,y)$) tem-se que $X(0) = 0$. Da mesma forma

$$u(a,y,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(a) = 0$$

Quanto às condições de fronteira em $y = 0$ e $y = b$, usando os mesmos argumentos :

$$u(x,0,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad Y(0) = 0$$

e

$$u(x,b,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad Y(b) = 0$$

9. Determinar a solução do problema de valores na fronteira e inicial

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & t > 0, \ , \ 0 < x < 3 \\ u(0,t) = u(3,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} x & \text{se } \ 0 < x < 1 \\ -1 & \text{se } \ 1 < x < 2 \\ 3 - x & \text{se } \ 2 < x < 3 \end{cases} & 0 < x < 3 \\ \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 & 0 < x < 3 \end{cases}$$

Resolução:

Dado que as condições de fronteira são nulas e a equação é homogénea, vamos começar pot resolver o problema de valores na fronteira

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & t > 0, \ , \ 0 < x < 3 \\ u(0,t) = u(3,t) = 0 & t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 & 0 < x < 3 \end{cases} \tag{16}$$

onde tambem considerámos a condição inicial nula (para facilitar cálculos). Vamos procurar soluções não nulas de (16), usando separação de variáveeis. Consideramos então $u(x,t) = X(x)T(t)$.

Substituindo na equação

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad \Leftrightarrow \quad XT'' = c^2 X'' T \quad \Leftrightarrow \quad \frac{T''}{c^2 T} = \frac{X''}{X}$$

O primeiro membro é uma função de t e o segundo membro uma função de x, a única forma de a igualdade se verificar para todos os $x \in]0,3[$ e $t > 0$ é que ambas sejam igual a uma constante. Assim, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\frac{T''}{c^2 T} = \lambda \quad \text{e} \quad \frac{X''}{X} = \lambda$$

Quanto às condições de fronteira em $x = 0$ e $x = 3$ tem-se que

$$u(0,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad T(t)X(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad T(t) \equiv 0 \quad \vee \quad X(0) = 0$$

Dado que a opção $T(t) \equiv 0$ impica $u(x,t) \equiv 0$ que não verica a condição inicial, tem-se que $X(0) = 0$. Da mesma forma

$$u(3,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(3) = 0$$

Quanto à condição inicial nula

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,0) = 0 \quad \Rightarrow \quad T'(0)X(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad T'(0) = 0 \quad \vee \quad X(x) \equiv 0$$

Dado que a opção $X(x) \equiv 0$ impica $u(x,t) \equiv 0$ que não verica a condição inicial tem-se que $T'(0) = 0$. Temos então dois problemas para resolver:

$$(\mathbf{P1}) \begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ X(0) = X(3) = 0 \end{cases} \quad , \quad (\mathbf{P2}) \begin{cases} T'' - c^2 \lambda T = 0 \\ T'(0) = 0 \end{cases}$$

(P1) Trata-se de um problema de valores próprios para a equação $X'' - \lambda X = 0$ com cpndições de fronteira de Dirichlet para $x \in [0,3]$. Assim os valores próprios são

$$\lambda_m = -\frac{n^2\pi^2}{9} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

correspondentes às soluções não nulas

$$X_n(x) = \text{sen}\,\frac{n\pi x}{3} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

(P2) Trata.se de uma equação de segunda ordem com uma condição inicial, Nota-se que as soluções deste problema só são relevantes para os casos em que λ é valor próprio de (P1). Vanos então resolver a equação (para cada $n \in \mathbb{N}$)

$$T'' + c^2\frac{n^2\pi^2}{9}T = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^2 + c^2\frac{n^2\pi^2}{9})T = 0$$

e a sua soluçãp geral é

$$T(t) = a\cos\frac{c\,n\pi t}{3} + b\,\text{sen}\,\frac{c\,n\pi t}{3}$$

Dado que $T'(0) = 0$

$$T'(0) = \frac{c\,n\pi x}{3}\Big(- a\,\text{sen}\,\frac{c\,n\pi t}{3} + b\cos\frac{c\,n\pi t}{3}\Big|_{t=0} = b = 0$$

Tem-se que a solução de (P2), para cada $n \in \mathbb{N}$, é

$$T_n(t) = a_n\cos\frac{c\,n\pi t}{3}$$

Então, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = a_n \text{sen}\,\frac{n\pi x}{3} \cos\frac{cn\pi t}{3}$$

é solução de (16). Formalmente

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{sen}\,\frac{n\pi x}{3} \cos\frac{cn\pi t}{3}$$

é solução de (16) verificando a condição inicial nula $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$.

Finalmente, há que determinar as constantes a_n de forma a que seja verificada a condição inicial, isto é

$$u(0,x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad 0 < x < 1 \\ -1 & \text{se} \quad 1 < x < 2 \\ 3-x & \text{se} \quad 2 < x < 3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{sen}\,\frac{n\pi x}{3} = \begin{cases} x & \text{se} \quad 0 < x < 1 \\ -1 & \text{se} \quad 1 < x < 2 \\ 3-x & \text{se} \quad 2 < x < 3 \end{cases}$$

Para podermos comparar temos que escrever a função

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad 0 < x < 1 \\ -1 & \text{se} \quad 1 < x < 2 \\ 3-x & \text{se} \quad 2 < x < 3 \end{cases}$$

como uma série de senos em $[0,3]$. Essa série será

$$SF_{\text{sen}} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{sen}\,\frac{n\pi x}{3}$$

em que para $n \in \mathbb{N}$ se tem

$$a_n = \frac{2}{3}\int_0^3 f(x) \text{sen}\,\frac{n\pi x}{3} dx = \frac{2}{3}\int_0^1 x \text{sen}\,\frac{n\pi x}{3} dx - \frac{2}{3}\int_1^2 \text{sen}\,\frac{n\pi x}{3} dx + \frac{2}{3}\int_2^3 (3-x) \text{sen}\,\frac{n\pi x}{3} dx$$

Primitivando por partes tem-se que

$$I_1 = \int_0^1 x \text{sen}\,\frac{n\pi x}{3} dx = -\frac{3x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\Big|_0^1 + \frac{3}{n\pi}\int_0^1 \cos\frac{n\pi x}{3} dx = -\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{3} + \frac{9}{n^2\pi^2}\text{sen}\,\frac{n\pi}{3}$$

e

$$\begin{aligned} I_3 = \int_2^3 (3-x) \text{sen}\,\frac{n\pi x}{3} dx &= -\frac{3(3-x)}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\Big|_2^3 - \frac{3}{n\pi}\int_2^3 \cos\frac{n\pi x}{3} dx \\ &= \frac{3}{n\pi}\cos\frac{2n\pi}{3} - \frac{9}{n^2\pi^2}\text{sen}\,\frac{2n\pi}{3} \end{aligned}$$

Por outro lado

$$I_2 = \int_1^2 \text{sen}\,\frac{n\pi x}{3} dx = -\frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\Big|_1^2 = \frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{3} - \frac{3}{n\pi}\cos\frac{2n\pi}{3}$$

Então

$$a_n = \frac{2}{3}\Big(I_1 - I_2 + I_3\Big) = \frac{4}{n\pi}\Big(\cos\frac{2n\pi}{3} - \cos\frac{n\pi}{3}\Big) + \frac{6}{n^2\pi^2}\Big(\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3} - \operatorname{sen}\frac{2n\pi}{3}\Big)$$

Finalmente a solução do problema pedido é

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{4}{n\pi}\Big(\cos\frac{2n\pi}{3} - \cos\frac{n\pi}{3}\Big) + \frac{6}{n^2\pi^2}\Big(\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3} - \operatorname{sen}\frac{2n\pi}{3}\Big)\Big]\cos\frac{cn\pi t}{3}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{3}$$

10. Determinar a solução do seguinte problema de valores de fronteira

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad , \quad 0 < x < a \ , \ 0 < y < b$$

satisfazendo as condições (de fronteira)

$$u(x,0) = 0 \quad , \quad u(x,b) = f(x) \quad , \quad u(0,y) = 0 \quad , \quad u(a,y) = f(y).$$

Assumimos que f uma função contínua em $[0, \max\{a,b\}]$.

Resolução:

Vamos procurar uma solução do problema na forma $u(x,y) = v(x,y) + w(x,y)$, onde $v(x,y)$ é solução de

$$\begin{cases} v_{xx} + v_{yy} = 0 \\ v(x,0) = v(x,b) = 0 \quad \text{e} \quad v(0,y) = 0 \\ v(a,y) = f(y) \end{cases} \tag{17}$$

e $w(x,y)$ é solução de

$$\begin{cases} w_{xx} + w_{yy} = 0 \\ w(0,y) = w(a,y) = 0 \quad \text{e} \quad w(x,0) = 0 \\ w(x,b) = f(x) \end{cases} \tag{18}$$

O domínio de ambos os problemas é dado por $x \in [0,a]$ e $y \in [0,b]$.

Vamos começar por resolver (17) considerando para já a equação diferencial (de Laplace) e todas as condições de fronteira nulas. Ou seja, vamos usar o método de separação de variáveis para obter soluções não nulas do problema homogéneo

$$\begin{cases} v_{xx} + v_{yy} \\ v(x,0) = v(x,b) = v(0,y) = 0 \end{cases} \tag{19}$$

onde $x \in [0, a]$ e $y \in [0, b]$. Vamos então procurar soluções da forma $u(x, t) = X(x)Y(y)$. Substituindo na equação de Laplace,

$$u_{xx} = -u_{yy} \quad \Leftrightarrow \quad X''(x)Y(y) = -X(x)Y''(y) \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\frac{X''(x)}{X(x)}}_{\text{função só de } x} = \underbrace{-\frac{Y''(y)}{Y(y)}}_{\text{função só de } y}$$

A única forma de a igualdade (entre funções de variáveis $x \in]0, a[$ e $y \in]0, b[$ independentes) se verificar é que ambos os membros da igualdade sejam iguais a uma mesma constante. Nesta altura, podemos antever que o problema de valores próprios será em $Y(y)$ pois, de acordo com (19), este terá duas condições de fronteira nulas enquanto o problema em $X(x)$ só terá uma. Como tal, colocamos o sinal negativo no primeiro membro.

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda$$

O leitor poderá verificar que se tivéssemos deixado o sinal onde estava, iríamos obter um problema de valores próprios (ligeiramente) diferente daquele cujo resultado pretendemos usar. Assim, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\frac{X''}{X} = -\lambda \quad \text{e} \quad \frac{Y''}{Y} = \lambda$$

Quanto às condições de fronteira em $y = 0$ e $y = b$, tem-se que

$$v(x, 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(x)Y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(x) \equiv 0 \quad \vee \quad Y(0) = 0$$

Dado que $X(x) \equiv 0$ implica que a solução $v(x, y)$ seja identicamente nula (que não pretendemos obter aqui), consideramos apenas $Y(0) = 0$. Da mesma forma (dado que pretendemos calcular soluções não nulas)

$$v(x, b) = 0 \quad \Rightarrow \quad Y(b) = 0$$

e, também,

$$v(0, y) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(0)Y(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(0) = 0.$$

Obtivémos assim dois problemas para resolver:

$$(\mathbf{P1}) \begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = 0, \end{cases} \qquad (\mathbf{P2}) \begin{cases} Y'' - \lambda Y = 0 \\ Y(0) = Y(b) = 0. \end{cases}$$

(P2) Trata-se de um problema de valores próprios para a equação $Y'' - \lambda Y = 0$ com condições de fronteira de Dirichlet, no domínio dado por $y \in [0, b]$. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, os valores próprios são

$$\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{b^2}$$

a cada um dos quas corresponde a função própria

$$Y_n(y) = \text{sen}\,\frac{n\pi y}{b}.$$

(P1) Trata.se de uma equação de segunda ordem com uma condição inicial. Nota-se que as soluções deste problema só são relevantes para os casos em que λ é valor próprio de (P2). Vamos então resolver a equação (para cada $n \in \mathbb{N}$):

$$X'' - \frac{n^2\pi^2}{b^2}X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(D^2 - \frac{n^2\pi^2}{b^2}\right)X = 0.$$

A sua solução geral é

$$X(x) = A\, e^{\frac{n\pi x}{b}} + B\, e^{-\frac{n\pi x}{b}}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Para resolver a equação de Laplace é conveniente escrever esta solução solução em termos das funções hiperbólicas $\mathsf{sh}\, \frac{n\pi x}{b}$, $\mathsf{ch}\, \frac{n\pi x}{b}$ — que são ambas combinações lineares das exponenciais $e^{\frac{n\pi x}{b}}$ e $e^{-\frac{n\pi x}{b}}$ e, por isso, foram uma outra base do espaço de soluções de $\big(D^2 - \frac{n^2\pi^2}{b^2}\big)X = 0$. Assim sendo:

$$X(x) = c\, \mathsf{sh}\, \frac{n\pi x}{b} + d\, \mathsf{ch}\, \frac{n\pi x}{b}, \qquad c, d \in \mathbb{R}.$$

Dado que $X(0) = 0$ tem-se que $d = 0$ e a solução de (P1), para cada $n \in \mathbb{N}$, é

$$X_n(x) = \mathsf{sh}\, \frac{n\pi x}{b}$$

(a menos de combinação linear). Então, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$v_n(x, y) = X_n(x)Y_n(y) = \mathsf{sen}\, \frac{n\pi y}{b} \mathsf{sh}\, \frac{n\pi x}{b}$$

é solução de (19). Formalmente

$$v(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)Y_n(y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathsf{sen}\, \frac{n\pi y}{b} \mathsf{sh}\, \frac{n\pi x}{b}$$

é solução de (19). Para concluir o cálculo da solução de (17), há que determinar as constantes c_n de modo a que

$$v(a, y) = f(y) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathsf{sh}\, \frac{n\pi a}{b} \mathsf{sen}\, \frac{n\pi y}{b} = f(y) \quad \forall y \in [0, b]$$

Tem-se então que os valores $c_n \mathsf{sh}\, \frac{n\pi a}{b}$ são os coeficientes da série de senos de $f(y)$ em $[0, b]$, ou seja

$$c_n \mathsf{sh}\, \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \mathsf{sen}\, \frac{n\pi y}{b}\, dy$$

e, como tal,

$$v(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathsf{sen}\, \frac{n\pi y}{b} \mathsf{sh}\, \frac{n\pi x}{b}, \qquad \text{com} \;\; c_n = \frac{2}{b\, \mathsf{sh}\, \frac{n\pi a}{b}} \int_0^b f(y) \mathsf{sen}\, \frac{n\pi y}{b}\, dy$$

é a solução de (17).

Para resolver o problema (18), notamos que se trocarmos as variáveis x e y, este problema transforma-se no problema (17) (desde que troquemos também os parâmetros a e b, pois à partida $0 \leq x \leq a$ e $0 \leq y \leq b$). Isto decorre da simetria da equação de Laplace relativamente às suas variáveis. Assim sendo, a solução de (18) é

$$w(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a}, \qquad \text{com } d_n = \frac{2}{a \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a}} \int_0^a f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a}\, dx$$

2 Exercícios Propostos

1. Determine a solução do seguinte problema de valor inicial e condição na fronteira:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx},\ x \in (0,\pi), \ \text{ com } \begin{cases} u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = \operatorname{sen}(x) - 2\operatorname{sen}(5x). \end{cases}$$

2. Determine a solução do seguinte problema de valor inicial e condição na fronteira:

$$u_t = u_{xx} - u,\ x \in (0,L), \ \text{ com } \begin{cases} u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 \\ u(x,0) = \cos(3\pi x/L). \end{cases}$$

3. Resolva o seguinte problema de valores de fronteira e inicial para $0 < x < \pi$ e $t > 0$

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) \quad \text{com} \quad \begin{cases} u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = \operatorname{sen}(x) + 3\operatorname{sen}(3x) \end{cases}$$

4. a) Recorrendo ao método de separação de variáveis, determine as soluções para $t \geqslant 0$ e para $x \in [0,\pi]$ de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

(satisfazendo a equação diferencial para $x \in]0,\pi[$).

b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial

$$u(x,0) = (\pi - x)x\ .$$

5. Seja f a função definida no intervalo $]0,2\pi[$ por $f(x) = x$.

(a) Determine a série de cosenos da função f.

(b) Resolva a equação

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - tu, \; x \in (0, 2\pi) \\ u_x(0,t) = u_x(2\pi, t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

6. Considere a equação de propagação do calor $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. $\quad (*)$

(a) Mostre que esta equação possui uma solução estacionária (isto é que não depende do tempo) da forma $u(x) = Ax + B$.

(b) Determine a solução estacionária para o problema correspondente a uma barra situada entre os pontos $x = 0$ e $x = L$, em que se fixam as temperaturas $u(0,t) = T_1, \; u(L,t) = T_2$.

(c) Resolva a equação $(*)$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$ e para as condições iniciais e de fronteira
$$\begin{cases} u(0,t) = 20 \\ u(1,t) = 60 \\ u(x,0) = 75. \end{cases}$$

7. Considere a seguinte equação diferencial parcial

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (\cos t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o problema de valor inicial e fronteira, para a equação dada, com as condições

$$\begin{cases} u(t,0) = 0 & t > 0, \\ u(t,\pi) = 0 & t > 0, \\ u(0,x) = \operatorname{sen} x + 2 \operatorname{sen} x \cos x & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

8. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação das ondas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(t,0) = u(t,1) = 0 \\ u(0,x) = 0 \; , \; \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 1 \end{cases}$$

para $t \geqslant 0$ e para $x \in [0,1]$, (satisfazendo a equação diferencial para $x \in]0,1[$) e onde c é uma constante real positiva.

9. Considere o seguinte problema de valores na fronteira, para $(x,y) \in]0,1[\times]0,1[$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{com} \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,y) = 0 \\ u(x,0) = 0 \;\; , \;\; u(x,1) = f(x) \end{cases} \tag{20}$$

sendo

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \; 0 \leq x \leq 1/2, \\ -1 & \text{se } \; 1/2 < x \leq 1. \end{cases}$$

(a) Determine a série de cosenos da função f no intervalo $[0,1]$ e indique para que valores converge a série.

(b) Resolva o problema (20).

10. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \ , \quad x, y \in [0,1]$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0 \ , \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x,1) = \cos\,(2\pi x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0 \ , \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(1,y) = \cos\,(2\pi y)$$

11. Seja a função f definida no intervalo $(0,\pi)$ por $f(x) = \operatorname{sen} x$.

(a) Determine a série de Fourier de cossenos da função f.

(b) Diga, justificando, qual o valor da soma da série de Fourier da alínea anterior para cada x no intervalo $[-\pi,\pi]$.

(c) Resolva a equação

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2u, \ x \in]0,\pi[\\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x). \end{cases}$$

12. Recorrendo ao método de separação de variáveis, resolva o seguinte problema para a equação das ondas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ u(x,0,t) = x \ , \quad u(x,1,t) = x \\ u(0,y,t) = 0 \ , \quad u(1,y,t) = 1 \\ u(x,y,0) = x \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = \cos\left(2\pi\,(x-y)\right) - \cos\left(2\pi\,(x+y)\right) \end{cases}$$

para $x, y \in [0,1]$ e $t \in \mathbb{R}$.

3 Soluções

1. $e^{-\alpha^2 t}\text{sen}\,(x) - 2e^{-25\alpha^2 t}\text{sen}\,(5x)$

2. $e^{-\left(1-\frac{9\pi^2}{L^2}\right)t}\cos\frac{3\pi x}{L}$

3. $u(x,t) = \text{sen}\,(t)\text{sen}\,(x) + \text{sen}\,(3t)\text{sen}\,(3x)$

4. (a) $\sum_{n=1}^{\infty} B_n\, e^{-(1+n^2)t}\,\text{sen}\,(nx)$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(1-(-1)^n)}{n^3\pi}\, e^{-(1+n^2)t}\,\text{sen}\,(nx) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\left(1+(2n+1)^2\right)t}}{(2n+1)^3}\,\text{sen}\,((2n+1)x)$

5. (a) $\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4((-1)^n-1)}{n^2\pi}\cos\left(\frac{n}{2}x\right) = \pi - \frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]$

(b) $\pi e^{-\frac{t^2}{2}} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\, e^{-\frac{n^2t+2t^2}{4}}\cos\left(\frac{n}{2}x\right)$

6. (b) $u(x) = T_1 + \frac{T_2-T_1}{L}x$

(c) $20 + 40x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{n\pi}\big(11 - 3(-1)^n\big)e^{-n^2\pi^2\alpha t}\text{sen}\,(n\pi x)$

7. $u(t,x) = e^{-\text{sen}\,t}\text{sen}\,(x) + e^{-4\text{sen}\,t}\text{sen}\,(2x)$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(1-(-1)^n)}{n^2\pi^2 c}\text{sen}\,(n\pi ct)\text{sen}\,(n\pi x)$

9. (a) $$SF_{\cos}f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{n\pi}\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos\,(n\pi x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad 0 \le x < 1/2, \\ 0 & \text{se} \quad x = 1/2 \\ -1 & \text{se} \quad 1/2 < x \le 1 \end{cases}$$

(b) $u(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi\,\text{sh}\,n\pi}\cos\,(n\pi x)\text{sh}\,(n\pi y)$

10. $C + \frac{\text{ch}\,(2\pi x)\cos\,(2\pi y) + \text{ch}\,(2\pi y)\cos\,(2\pi x)}{2\pi\,\text{sh}\,(2\pi)}$, $C \in \mathbb{R}$

11. (a) $\frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{n^2-1}\cos\,(nx) = \frac{2}{\pi}\left(1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{4n^2-1}\cos\,(2nx)\right)$

(b) $|\text{sen}\,x|$ (c) $\frac{2}{\pi}e^{2t} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2e^{(2-n^2)t}}{4n^2-1}\cos\,(2nx)$

12. $u(x,y,t) = x + \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\,\text{sen}\,(2\pi x)\,\text{sen}\,(2\pi y)\,\text{sen}\,(2\sqrt{2}\pi t)$