TÉCNICO LISBOA

Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2020/2021

Curso: MEQ, MEAmbi

Ficha de Problemas nº 6-A

Singularidades, Resíduos e Teorema dos Resíduos (continuação).

1 Exercícios Resolvidos

1. Determine o valor dos seguintes integrais:

$$\textbf{(a)} \quad \oint_{|z|=1} z(z^2+1)e^{1/z}dz \qquad \textbf{(b)} \quad \oint_{|z|=R} \frac{e^{1/z}}{(1-z)^2}dz \ , \ R \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

$$\textbf{(c)} \quad \oint_{|z-2|=3} \frac{e^z-1}{z^2 \operatorname{sen} z}dz \qquad \textbf{(d)} \quad \oint_{|z-\sqrt{2}|=\frac{3}{2}} \frac{1-\cos z}{z \operatorname{sen} z \operatorname{sh} z}dz$$

onde todas as curvas são percorridas uma vez em sentido directo. **Resolução:**

a) Sendo $f(z) = z(z^2+1)e^{1/z}$, tem-se que f é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e 0 pertence à região interior à curva $|z| = 1$, Assim, aplicando o teorema dos resíduos:

$$\oint_{|z|=1} z(z^2+1)e^{1/z}dz \ = \ 2\pi \mathrm{i} \operatorname{Res}(f, 0).$$

A função f é o produto de uma função inteira (um polinómio) pela função $e^{1/z}$, que oscila entre -1 e 1 quando $z \to 0$ segundo o eixo imaginário; por este motivo, não existe $\lim\limits_{z\to 0} e^{1/z}$. Podemos assim suspeitar que 0 é uma singularidade essencial de f. Para demonstrar esta nossa conjectura, há que desenvolver a função f em série de Laurent em torno da origem. Usando a série de Maclaurin da exponencial:

$$\begin{aligned}
z(z^2+1)e^{1/z} &= z(z^2+1)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!} \\
&= z^3\Big(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{4!z^4}+\cdots\Big)+z\Big(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\cdots\Big) \\
&= \Big(z^3+z^2+\frac{z}{2}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!z}+\frac{1}{5!z^2}+\cdots\Big)+\Big(z+1+\frac{1}{2z}+\frac{1}{3!z^2}+\cdots\Big) \\
&= z^3+z^2+\Big(\frac{1}{2}+1\Big)z+\Big(\frac{1}{3!}+1\Big)+\underbrace{\Big(\frac{1}{4!}+\frac{1}{2}\Big)\frac{1}{z}+\Big(\frac{1}{5!}+\frac{1}{3!}\Big)\frac{1}{z^2}+\cdots}_{\text{parte principal}}
\end{aligned}$$

Confirma-se que 0 é singularidade essencial, pois a parte principal desta série tem um número infinito de termos. O resíduo de f em 0 é o coeficiente do termo $\frac{1}{z}$, ou seja,

$$\mathrm{Res}(f,0) = \frac{1}{4!} + \frac{1}{2} = \frac{13}{24}$$

Assim sendo:

$$\oint_{|z|=1} z(z^2+1)e^{1/z}dz \; = \; \frac{13\pi \mathrm{i}}{12}$$

b) Sendo $f(z) = \dfrac{e^{1/z}}{(z-1)^2}$, tem-se que f é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$. As singularidades de f são, pois, 0 e 1.

Caso 1. Se $0 < R < 1$, a única singularidade na região interior à curva é 0; desta forma,

$$\oint_{|z|=R} \frac{e^{1/z}}{(1-z)^2}\, dz \; = \; 2\pi \mathrm{i}\, \mathrm{Res}(f,0).$$

Tal como na alínea (a), suspeitamos que 0 é uma singularidade essencial de $f(z) = \frac{e^{1/z}}{(1-z)^2}$. Pensemos então na série de Laurent de f centrada em 0 (e válida em $0 < |z| < 1$):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(z-1)^2} \cdot e^{1/z} &= \left(\frac{1}{1-z}\right)' \cdot e^{1/z} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)' \cdot e^{1/z} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n} \\
&= \left(1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \cdots\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3! z^3} + \frac{1}{4! z^4} + \cdots\right)
\end{aligned}$$

Para completar o cálculo da série de Laurent é necessário efectuar o produto destas séries, o que dá algum trabalho (devido à distributividade do produto relativamente à soma). Mas, na verdade, o único termo desta série que precisamos de calcular é $\frac{a_{-1}}{z}$. Recordamos que que o valor de a_{-1} é, precisamente, o resíduo de f em 0. Assim sendo, e calculando apenas os produtos dos termos cujo resultado é $\frac{\text{const}}{z}$, verifica-se que

$$\mathrm{Res}(f,0) = a_{-1} = 1 + \frac{2}{2!} + \frac{3}{3!} + \frac{4}{4!} + \cdots$$

ou seja

$$\mathrm{Res}(f,0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

e assim

$$\oint_{|z|=R} \frac{e^{1/z}}{(1-z)^2} dz = 2\pi e \mathrm{i}$$

Caso 2. Se $R > 1$ então ambas as singularidades pertencem à região interior à curva, pelo que:

$$\oint_{||z||=R} \frac{e^{1/z}}{(1-z)^2} dz \ = \ 2\pi \mathrm{i}\Big(\mathrm{Res}(f,0) + \mathrm{Res}(f,1)\Big).$$

Falta-nos calcular $\mathrm{Res}(f,1)$. Atendendo que $e^{1/z}$ (que é analítica em 1) não se anula em 1 e que 1 é um zero de ordem 2 do denominador, então 1 deverá ser um pólo de ordem 2 de f. De facto

$$\lim_{z\to 1}(z-1)^2 f(z) = \lim_{z\to 1} e^{1/z} = e$$

pelo que se trata efectivamente de um pólo de ordem 2 e

$$\mathrm{Res}(f,1) = \lim_{z\to 1}\Big((z-1)^2 f(z)\Big)' = \lim_{z\to 1}\Big(e^{1/z}\Big)' = -e$$

Assim

$$\oint_{|z|=R} \frac{e^{1/z}}{(1-z)^2} dz = 2\pi \mathrm{i}(e-e) = 0$$

c) Sendo $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z^2 \operatorname{sen} z}$, tem-se que f é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{z = k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Temos que

$$k\pi \in \Big\{z \in \mathbb{C} : |z-2| < 3\Big\} \quad \Leftrightarrow \quad k = 0 \ \vee \ k = \pi$$

pelo que, aplicando o teorema dos resíduos, tem-se que

$$\oint_{|z-2|=3} \frac{e^z - 1}{z^2 \operatorname{sen} z} dz = 2\pi \mathrm{i}\Big(\mathrm{Res}(f,0) + \mathrm{Res}(f,\pi)\Big).$$

Dado que f é o quociente de duas funções inteiras, as suas singularidades são não essenciais.

- Para $z = 0$, vamos usar as séries de Maclaurin da função seno e da função exponencial (dado que $e^z - 1$ se anula em $z = 0$) para poder classificar a singularidade. Assum

$$f(z) = \frac{z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \cdots}{z^2\Big(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots\Big)} = \frac{z\Big(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3!} + \cdots\Big)}{z^3\Big(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \cdots\Big)} = \frac{1}{z^2} F(z)$$

sendo

$$F(z) = \frac{1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3!} + \cdots}{1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \cdots}$$

Atendendo a que $F(z)$ é analítica numa vizinança de 0 e que $F(0) = 1 \neq 0$, concluimos que 0 é um pólo de ordem 2 de f. Então

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f,0) &= \lim_{z\to 0}\Big(z^2 f(z)\Big)' \\
&= \lim_{z\to 0} F'(z) \\
&= \lim_{z\to 0} \frac{\Big(\frac{1}{2}+\frac{2z}{3!}+\cdots\Big)\Big(1-\frac{z^2}{3!}+\cdots\Big)-\Big(1+\frac{z}{2}+\cdots\Big)\Big(-\frac{2z}{3!}+\frac{4z^3}{5!}+\cdots\Big)}{\Big(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots\Big)^2} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

- Para $z=\pi$, note que e^z-1 e z^2 não se anulam em π; ou seja, apenas $\operatorname{sen} z$ se anula em π. Sendo π um zero de ordem 1 de $\operatorname{sen} z$, então π deverá ser um pólo simples de f. Para o mostrar, basta calcular o limite

$$\lim_{z\to\pi}\Big((z-\pi)f(z)\Big) = \lim_{z\to\pi}\frac{e^z-1}{z^2}\lim_{z\to\pi}\frac{z-\pi}{\operatorname{sen} z}$$

  Pela regra de Cauchy

$$\lim_{z\to\pi}\frac{z-\pi}{\operatorname{sen} z} = -\lim_{z\to 0}\frac{z}{\operatorname{sen} z} = -1,$$

  pelo que

$$\lim_{z\to\pi}\Big((z-\pi)f(z)\Big) = -\frac{e^\pi-1}{\pi^2}\neq 0.$$

  Confirma-se assim que π é pólo simples de f. Desta forma:

$$\operatorname{Res}(f,\pi) = -\frac{e^\pi-1}{\pi^2}$$

Finalmente

$$\oint_{|z-2|=3}\frac{e^z-1}{z^2\operatorname{sen} z}\,dz \;=\; 2\pi\mathrm{i}\Big(\frac{1}{2}-\frac{e^\pi-1}{\pi^2}\Big)$$

d) Sendo $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z\operatorname{sen} z\operatorname{sh} z}$ tem-se que f é analítica em $\mathbb{C}\setminus\Big(\{k\pi\mathrm{i}:k\in\mathbb{Z}\}\cup\{k\pi:k\in\mathbb{Z}\}\Big)$. Tem-se que

$$k\pi\in\Big\{z\in\mathbb{C}:|z-\sqrt{2}|<\tfrac{3}{2}\Big\}\quad\Leftrightarrow\quad k=0$$

e

$$k\pi\mathrm{i}\in\Big\{z\in\mathbb{C}:|z-\sqrt{2}|<\tfrac{3}{2}\Big\}\quad\Leftrightarrow\quad k=0$$

pelo que 0 é a única singularidade de f pertencente ao interior da curva. Aplicando o teorema dos resíduos:

$$\oint_{|z-\sqrt{2}|=\frac{3}{2}}\frac{1-\cos z}{z\operatorname{sen} z\operatorname{sh} z}\,dz \;=\; 2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}(f,0).$$

Mais uma vez, f é o quociente de funções inteiras e, como tal, é uma singularidade não essencial. Para a classificar, vamos usar as séries de Maclaurin das funções $1-\cos z$, $\operatorname{sen} z$ e de $\operatorname{senh} z$ (note que todas elas se anulam em 0). Ora

$$1-\cos z = z^2\Big(\frac{1}{2}-\frac{z^2}{4!}+\frac{z^4}{6!}+\cdots\Big),$$

$$\operatorname{sen} z = z\Big(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots\Big) \quad \text{e} \quad \operatorname{sh} z = -\mathrm{i}\operatorname{sen}(\mathrm{i}z) = z\Big(1+\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots\Big)$$

Então

$$f(z)=\frac{z^2}{z^3}F(z)=\frac{1}{z}F(z)$$

em que

$$F(z)=\frac{\frac{1}{2}-\frac{z^2}{4!}+\frac{z^4}{6!}+\cdots}{\Big(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots\Big)\Big(1+\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots\Big)}$$

Atendendo a que $F(z)$ é analítica numa vizinhança de 0 e $F(0)=\frac{\mathrm{i}}{2}\neq 0$, concluimos que 0 é um pólo simples de f. Então

$$\operatorname{Res}(f,0)=\lim_{z\to 0} zf(z)=F(0)=\frac{1}{2}$$

Finalmente

$$\oint_{|z-\sqrt{2}|=\frac{3}{2}} \frac{1-\cos z}{z\operatorname{sen} z\operatorname{sh} z}dz=\pi\mathrm{i}$$

2. Considere a função f é definida por

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_K \frac{|\xi|^2}{\xi - z}d\xi \quad , \quad z\notin K$$

onde K é a circunferência $\big\{\xi\in\mathbb{C} : |\xi-1|=1\big\}$ percorrida uma vez em sentido directo.

(a) Mostre que para $\xi\in K$

$$\bar{\xi}=\frac{\xi}{\xi-1}$$

(b) Determine $f(z)$.

Resolução:

a) Se $\xi \in K$ então $\xi = 1 + e^{\mathrm{i}\theta}$ com $\theta \in \mathbb{R}$. Então

$$\frac{\xi}{\xi - 1} = \frac{1 + e^{\mathrm{i}\theta}}{e^{\mathrm{i}\theta}} = e^{-\mathrm{i}\theta} + 1 = \overline{\xi},$$

como se queria mostrar.

b) Usando a alínea anterior, para qualquer $\xi \in K$ (isto é, sobre a curva de integração) a função integranda coincide com a função:

$$\frac{|\xi|^2}{\xi - z} = \frac{\xi \cdot \overline{\xi}}{\xi - z} = \frac{\xi^2}{(\xi - 1)(\xi - z)}$$

Por isso, e apesar dessa função não ser, à partida, analítica, ela coincide sobre a curva com uma função racional pelo que o seu integral pode ser calculado por recurso às fórmulas integrais de Cauchy.

Para tal, consideramos dois casos: z pertence à região interior a K e z pertence à região exterior a K.

Caso 1. Se $z \in \operatorname{ext} K$, significa que $\xi - z$ não se anula nesta região e como tal a função $F(\xi) = \frac{\xi^2}{\xi - z}$ é analítica em int K. Então, pela fórmula integral de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_K \frac{F(\xi)}{\xi - 1}\, d\xi = F(1) = \frac{1}{1 - z}$$

Caso 2. Se $z \in \operatorname{int} K$, então consideramos duas curvas de Jordan, K_1 e K_2 com a mesma orientação de K e tais que

$$\begin{cases} 1 \in K_1 \\ z \notin \overline{K_1} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} z \in K_2 \\ 1 \notin \overline{K_2} \end{cases}$$

Pelo teorema de Cauchy para regiões multiplamente conexas tem-se que

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_K \frac{\xi^2}{(\xi - 1)(\xi - z)} d\xi = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{K_1} \frac{\xi^2/(\xi - z)}{\xi - 1} d\xi + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{K_2} \frac{\xi^2/(\xi - 1)}{\xi - z} d\xi$$

Atendendo a que $F_1(\xi) = \frac{\xi^2}{\xi - z}$ é analítica em $\operatorname{int} K_1$, pela fórmula integral de Cauchy

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{K_1} \frac{F_1(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = F_1(1) = \frac{1}{1 - z}.$$

Analogamente, a função $F_2(\xi) = \frac{\xi^2}{\xi - 1}$ é analítica em $\operatorname{int} K_2$; pela fórmula integral de Cauchy:

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{K_2} \frac{F_2(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = F_2(z) = \frac{z^2}{z - 1}.$$

Finalmente

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_K \frac{F(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \frac{1}{1 - z} + \frac{z^2}{z - 1} = z + 1.$$

3. Calcule o valor do integral

$$\oint_C \frac{2\,\mathrm{Re}\,z}{2z+1}\,dz$$

onde C é a circunferência $\big\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\big\}$ percorrida uma vez no sentido directo.

Resolução:

Tendo em conta para $|z| = 1$ então $z = e^{\mathrm{i}\theta}$ para algum $\theta \in [0, 2\pi]$, então

$$2\,\mathrm{Re}\,z = z + \bar{z} = e^{\mathrm{i}\theta} + e^{-\mathrm{i}\theta} = z + z^{-1}.$$

Assim, para qualquer z pertencente à curva de integração, a função integranda é dada por

$$\frac{2\,\mathrm{Re}\,z}{2z+1} = \frac{z+z^{-1}}{2z+1} = \frac{z^2+1}{z(2z+1)} = \frac{z^2+1}{2z(z+\frac{1}{2})},$$

ou seja, coincide com a função racional $f(z) = \dfrac{z^2+1}{2z(z+\frac{1}{2})}$. O integral de ambas as funções no caminho C é, pois, idêntico.

As singularidades de f são os pólos simples 0 e $-\frac{1}{2}$, e pertencem ambas ao interior da curva. Aplicando o teorema dos resíduos ao segundo integral:

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{2\,\mathrm{Re}\,z}{2z+1}dz &= \oint_C \frac{z^2+1}{2z(z+\frac{1}{2})}\,dz \\
&= 2\pi\mathrm{i}\left(\lim_{z\to 0} z f(z) + \lim_{z\to -\frac{1}{2}} (z+\tfrac{1}{2})\, f(z)\right) \\
&= 2\pi\mathrm{i}\left(\lim_{z\to 0} \frac{z^2+1}{2(z+\frac{1}{2})} + \lim_{z\to -\frac{1}{2}} \frac{z^2+1}{2z}\right) \\
&= 2\pi\mathrm{i}\left(1 - \frac{5}{4}\right) \; = \; -\frac{\pi\mathrm{i}}{2}
\end{aligned}$$

4. Recorrendo ao teorema dos resíduos, estabeleça os seguintes resultados:

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\mathrm{sen}^2\,\theta} = \pi\sqrt{\frac{2}{3}}$ **(b)** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1+2\cos\varphi}{5+4\cos\varphi}\,d\varphi = 0$

(c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{2\cos\varphi}{(5+4\cos\varphi)^2}\,d\varphi = -\frac{16\pi}{27}$ **(d)** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta}{5-4\cos 2\theta}\,d\theta = \frac{3\pi}{8}$

Sugestão para (d): mostre que

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(3\theta)}{5-4\cos(2\theta)}\,d\theta = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_0^{2\pi} \frac{1+e^{i6\theta}}{5-4\cos(2\theta)}\,d\theta$$

Resolução:

(a) Considerando que se trata de um integral complexo ao longo do caminho parametrizado por $z(\theta)=e^{i\theta}$, $\theta\in[0,2\pi]$, obtemos

$$\begin{aligned}
I &\overset{\text{def}}{=} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta \\
&= \oint_{|z|=1} \frac{1}{2+\left(\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)^2}\,\frac{dz}{iz} \\
&= 4i\oint_{|z|=1} \underbrace{\frac{z}{z^4-10z^2+1}}_{\overset{\text{def}}{=}f(z)}\,dz
\end{aligned}$$

A função $f(z)$ é analítica em $\mathbb{C}\setminus\{\sqrt{5+2\sqrt{6}},-\sqrt{5+2\sqrt{6}},\sqrt{5-2\sqrt{6}},-\sqrt{5-2\sqrt{6}}\}$, sendo fácil de verificar que

$$\left|\pm\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right|>1 \qquad \text{e} \qquad \left|\pm\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right|<1.$$

Pelo teorema dos resíduos

$$I = 4\mathrm{i}\cdot 2\pi\mathrm{i}\left(\mathrm{Res}\left(f,\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)+\mathrm{Res}\left(f,-\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)\right)$$

Recordamos que se $f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ (onde φ e ψ são analíticas em z_0) e $\varphi(z_0)\neq 0$, $\psi(z_0)=0$ e $\psi'(z_0)\neq 0$ então z_0 é um pólo simples de f e $\mathrm{Res}(f,z_0)=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$. No nosso caso

$$\varphi(z)=z \qquad \text{e} \qquad \psi(z)=z^4-10z^2+1 \quad\Rightarrow\quad \psi'(z)=4z^3-10z.$$

Resulta assim que as singularidades $z_0=\pm\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ são pólos simples de f e

$$\mathrm{Res}\,(f,z_0)=\frac{z_0}{4z_0^3-20z_0}=\frac{1}{4z_0^2-20}=\frac{1}{4\left(5-2\sqrt{6}\right)-20}=-\frac{1}{8\sqrt{6}}$$

(para ambas as singularidades).

Em consequência

$$I=-8\pi\left(2\cdot\frac{-1}{8\sqrt{6}}\right)=\frac{2\pi}{\sqrt{6}}=\pi\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

(b) Considerando que se trata de um integral complexo ao longo do caminho parametrizado por $z(\theta) = e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, obtemos

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1 + e^{\mathrm{i}\varphi} + e^{-\mathrm{i}\varphi}}{5 + 2e^{\mathrm{i}\varphi} + 2e^{-\mathrm{i}\varphi}}\, d\varphi = \oint_{|z|=1} \frac{1 + z + \frac{1}{z}}{5 + 2z + \frac{2}{z}}\, \frac{dz}{\mathrm{i}z} = \frac{1}{\mathrm{i}} \oint_{|z|=1} \frac{z + z^2 + 1}{z(2z^2 + 5z + 2)}\, dz$$

A função

$$f(z) \overset{\text{def}}{=} \frac{z + z^2 + 1}{z(2z^2 + 5z + 2)} = \frac{z^2 + z + 1}{2z(z + 2)(z + \frac{1}{2})}$$

é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{-2, -\frac{1}{2}, 0\}$, sendo que apenas 0 e $-\frac{1}{2}$ estão no interior de $|z| = 1$. Pelo teorema dos resíduos

$$I = 2\pi\Big(\operatorname{Res}(f, 0) + \operatorname{Res}(f, -\tfrac{1}{2})\Big)$$

Dado que todas as singularidades são pólos simples de f,

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \lim_{z \to 0} z f(z) = \frac{1}{2} \quad , \quad \operatorname{Res}(f, -\tfrac{1}{2}) = \lim_{z \to -\frac{1}{2}} (z + \frac{1}{2}) f(z) = \frac{3/4}{-3/2} = -\frac{1}{2}$$

Resulta assim que $I = 0$

(c) Considerando que se trata de um integral complexo ao longo do caminho parametrizado por $z(\theta) = e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, obtemos

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{e^{\mathrm{i}\varphi} + 2e^{-\mathrm{i}\varphi}}{(5 + 2e^{\mathrm{i}\varphi} + e^{-\mathrm{i}\varphi})^2}\, d\varphi = \oint_{|z|=1} \frac{z + \frac{1}{z}}{(5 + 2z + \frac{2}{z})^2}\, \frac{dz}{\mathrm{i}z} = \frac{1}{\mathrm{i}} \oint_{|z|=1} \frac{z^2 + 1}{(2z^2 + 5z + 2)^2}\, dz$$

A função

$$f(z) \overset{\text{def}}{=} \frac{z^2 + 1}{(2z^2 + 5z + 2)^2} = \frac{z^2 + 1}{4(z + 2)^2(z + \frac{1}{2})^2}$$

é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{-2, -\frac{1}{2}\}$, sendo que apenas $-\frac{1}{2}$ pertence ao interior de $|z| = 1$. Utilizando o Teorema dos Resíduos

$$I = 2\pi \operatorname{Res}(f, -\tfrac{1}{2})$$

É evidente que a singularidade $-\frac{1}{2}$ é um pólo de segunda ordem de f, pelo que

$$\operatorname{Res}(f, -\tfrac{1}{2}) = \lim_{z \to -\frac{1}{2}} \big((z + \tfrac{1}{2})^2 f(z)\big)' = \lim_{z \to -\frac{1}{2}} \Big(\frac{z^2 + 1}{4(z + 2)^2}\Big)' = -\frac{8}{27}$$

Desta forma, $I = -\dfrac{16\pi}{27}$.

(d) Atendendo a que

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2} \qquad , \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

tem-se que, para $\theta \in \mathbb{R}$

$$\cos^2(3\theta) = \frac{1}{2}(1 + \cos(6\theta)) = \frac{1}{2}\operatorname{Re}(1 + \cos(6\theta) + i \operatorname{sen}(6\theta)) = \frac{1}{2}\operatorname{Re}(1 + e^{6i\theta}),$$

o que prova a sugestão. Comecemos então por calcular

$$\begin{aligned} I &\overset{\text{def}}{=} \int_0^{2\pi} \frac{1+e^{6i\theta}}{5-4\cos(2\theta)}\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1+e^{6i\theta}}{5-4(\frac{e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}}{2})}\,d\theta \\ &= \oint_{|z|=1} \frac{1+z^6}{5-2(z^2+z^{-2})}\,\frac{dz}{iz} \\ &= \frac{i}{2}\oint_{|z|=1} \frac{z(z^6+1)}{(z^2-2)(z^2-\frac{1}{2})}\,dz \end{aligned}$$

A função integranda tem singularidades em $\pm\sqrt{2}$ e $\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$, pelo que:

$$I = \frac{\mathrm{i}}{2}\cdot 2\pi\mathrm{i}\Big(\mathrm{Res}\left(f,\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)+\mathrm{Res}\left(f,-\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)\Big)$$

Atendendo a que estas singularidades são pólos simples de f, tem-se que

$$\mathrm{Res}\left(f,\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right) = \lim_{z\to\sqrt{1/2}}\left(z-\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)f(z) = \lim_{z\to\sqrt{1/2}}\frac{z(z^6+1)}{(z^2-2)\left(z+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)} = -\frac{3}{8}$$

Analogamente

$$\mathrm{Res}\left(f,-\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right) = -\frac{3}{8}$$

pelo que

$$I = -\pi\cdot 2\cdot\left(-\frac{3}{8}\right) = \frac{6\pi}{8}$$

Finalmente

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2 3\theta}{5-4\cos 2\theta}\,d\theta = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_0^{2\pi}\frac{1+e^{i6\theta}}{5-4\cos(2\theta)}\,d\theta = \frac{3\pi}{8}$$

5. Recorrendo ao teorema dos resíduos, mostre as igualdades que se seguem.

   (a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x^2+1)(x^2+3)}\,dx = \frac{(3-\sqrt{3})\pi}{6}.$

   (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+4)^2}\,dx = \frac{\pi}{16}.$

   (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^6+1} = \frac{2}{3}\pi.$

Resolução:

(a) Considere-se a função complexa de variável complexa

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z^2+3)}$$

e, para $R > \sqrt{3}$, a curva

$$\Gamma_R = I_R \cup \gamma_R \overset{\text{def}}{=} \big\{z = x \ : \ x \in [-R, R]\big\} \cup \big\{z = Re^{i\theta} \ : \ \theta \in [0, \pi]\big\}$$

Pelo teorema dos resíduos

$$\oint_{\Gamma_R} f(z)\, dz = 2\pi \mathrm{i} \Big(\mathrm{Res}(f, i) + \mathrm{Res}(f, \sqrt{3}i)\Big)$$

Dado que as singularidades são pólos simples de f

$$\mathrm{Res}(f, \mathrm{i}) = \lim_{z\to \mathrm{i}} (z-\mathrm{i}) f(z) = \lim_{z\to \mathrm{i}} \frac{1}{(z+\mathrm{i})(z^2+3)} = \frac{1}{4\mathrm{i}}$$

e

$$\mathrm{Res}(f, \mathrm{i}\sqrt{3}) = \lim_{z\to \mathrm{i}\sqrt{3}} (z-\mathrm{i}\sqrt{3}) f(z) = \lim_{z\to \mathrm{i}\sqrt{3}} \frac{1}{(z+\mathrm{i}\sqrt{3})(z^2+1)} = -\frac{1}{4\mathrm{i}\sqrt{3}}$$

Então

$$\oint_{\Gamma_R} f(z)\, dz = 2\pi \mathrm{i} \left(\frac{1}{4\mathrm{i}} - \frac{1}{4\mathrm{i}\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi(3-\sqrt{3})}{6}$$

Por outro lado

$$\frac{\pi(3-\sqrt{3})}{6} = \oint_{\Gamma_R} f(z)\, dz = \int_{I_R} f(z)\, dz + \int_{\gamma_R} f(z)\, dz = \int_{-R}^{R} f(x)\, dx + \int_{\gamma_R} f(z)\, dz \qquad (1)$$

Como $\mathrm{Grau}\big((z^2+1)(z^2+3)\big) - \mathrm{Grau}(1) = 4 - 0 = 4 \geq 2$, então:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\, dz = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{1}{(z^2+1)(z^2+3)}\, dz = 0. \qquad (2)$$

Assim sendo, fazendo $R \to \infty$ na equação (1) obtém-se o resultado que se pretende:

$$\frac{\pi(3-\sqrt{3})}{6} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+3)}\, dx.$$

Alternativamente, para provar directamente por estimativa que o integral (4) converge para 0 quando $R \to \infty$, notamos em primeiro lugar que

$$|f(z)| = \frac{1}{|z^2+1||z^2+3|} \leq \frac{1}{(R^2-1)(R^2-3)},$$

sempre que $|z| = R > \sqrt{3}$. Desta forma:

$$\Big| \int_{\gamma_R} f(z) dz \Big| \leq \int_{\gamma_R} |f(z)|\, |dz| \leq \frac{1}{(R^2-1)(R^2-3)} \int_{\gamma} |dz| = \frac{\pi R}{(R^2-1)(R^2-3)} \to 0$$

quando $R \to \infty$.

(b) Considere-se a função complexa de variável complexa

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+4)^2}$$

e para $R > 2$, a curva

$$C_R = I_R \cup \gamma_R \overset{\text{def}}{=} \big\{z = x \ : \ x \in [-R, R]\big\} \cup \big\{z = Re^{i\theta} \ : \ \theta \in [0, \pi]\big\}$$

A função f é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{-2\mathrm{i}, 2\mathrm{i}\}$; dado que $\mathrm{Im}(-2\mathrm{i}) < 0$ e $\mathrm{Im}(2\mathrm{i}) > 0$, apenas a singularidade $2\mathrm{i}$ pertence à região interior a C_R. Pelo teorema dos resíduos:

$$\oint_{C_R} f(z)\, dz = 2\pi\mathrm{i}\, \mathrm{Res}(f, 2\mathrm{i}).$$

Dado que $2\mathrm{i}$ é um pólo de ordem 2 de f:

$$\mathrm{Res}(f, 2\mathrm{i}) = \lim_{z\to 2\mathrm{i}} \Big((z-2\mathrm{i})^2 f(z)\Big)' = \lim_{z\to 2\mathrm{i}} \left(\frac{1}{(z+2\mathrm{i})^2}\right)' = \lim_{z\to 2\mathrm{i}} \frac{-2}{(z+2\mathrm{i})^3} = -\frac{2}{(4\mathrm{i})^3} = \frac{1}{32\mathrm{i}}.$$

Tem-se então que

$$\oint_{C_R} f(z)\, dz = \frac{2\pi\mathrm{i}}{32\mathrm{i}} = \frac{\pi}{16}$$

Por outro lado

$$\frac{\pi}{16} = \oint_{C_R} f(z)\, dz = \int_{I_R} f(z)\, dz + \int_{\gamma_R} f(z)\, dz = \int_{-R}^{R} f(x)\, dx + \int_{\gamma_R} f(z)\, dz \tag{3}$$

Como $\mathrm{Grau}\,\big((z^2+4)^2\big) - \mathrm{Grau}(1) = 4 - 0 = 4 \geq 2$, então:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\, dz = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{1}{(z^2+4)^2}\, dz = 0. \tag{4}$$

Assim sendo, fazendo $R \to \infty$ na equação (3) obtém-se:

$$\frac{\pi}{16} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+4)^2}\, dx.$$

(c) Poderíamos aqui proceder como na resolução das alíneas **(a)** e **(b)**. No entanto, e com o objectivo de poupar alguns cálculos, utilizaremos um método ligeiramente diferente.

Considere-se a função complexa de variável complexa

$$f(z) = \frac{1}{z^6+1}$$

e para $R > 1$, a curva

$$\begin{aligned} C_R &= I_R \cup \gamma_R \cup I_{\frac{\pi}{3}} \\ &\overset{\text{def}}{=} \big\{z = x : x \in [0, R]\big\} \cup \big\{z = Re^{i\theta} : \theta \in [0, \tfrac{\pi}{3}]\big\} \cup \big\{z = xe^{i\frac{\pi}{3}} : R \geq x \geq 0\big\} \end{aligned}$$

percorrida no sentido directo. De facto, C_R é a fronteira do sector circular

$$\left\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < R \wedge 0 < \arg z < \frac{\pi}{3}\right\} \ = \ \operatorname{int} C_R.$$

Atendendo a que as singularidades de f são as raízes sextas de -1, é fácil de verificar que a única singularidade no interior de C_R é, precisamente, $e^{\frac{i\pi}{6}}$. O aluno deve fazer um esboço das curvas $|z| = R$ e C_R e representar, nesse esboço, todos os valores de $\sqrt[6]{-1}$); poderá então comprovar que o método das alíneas anteriores obrigaria à inclusão, no cálculo do integral, dos resíduos de três singularidades, em vez de apenas uma.

Como as seis raízes de -1 são distintas, a factorização de $z^6 + 1$ não tem factores repetidos. Desta forma, $e^{\frac{i\pi}{6}}$ é pólo simples e

$$\operatorname{Res}(f, e^{\frac{\mathrm{i}\pi}{6}}) = \lim_{z \to e^{\frac{\mathrm{i}\pi}{6}}} \frac{z - e^{\frac{\mathrm{i}\pi}{6}}}{z^6 + 1} = \lim_{z \to e^{\frac{\mathrm{i}\pi}{6}}} \frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6} e^{-\frac{5\mathrm{i}\pi}{6}},$$

donde resulta que

$$\oint_{C_R} f(z)\, dz \ = \ 2\pi \mathrm{i} \operatorname{Res}(f, e^{\frac{\mathrm{i}\pi}{6}}) \ = \ \frac{\pi}{3}\, \mathrm{i}\, e^{-\frac{5\mathrm{i}\pi}{6}} \ = \ \frac{\pi}{3} e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{6}\right)} = \frac{\pi}{3} e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$$

Por outro lado

$$\oint_{C_R} f(z)\, dz = \int_{I_R} f(z)\, dz + \int_{\gamma_R} f(z)\, dz + \int_{I_{\frac{\pi}{3}}} f(z)\, dz$$

ou seja

$$\frac{\pi}{3} e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \int_{I_R} f(z)\, dz + \int_{\Gamma_R} f(z)\, dz + \int_{I_{\frac{\pi}{3}}} f(z)\, dz$$

Utilizando as parametrizações que definem cada um dos segmentos de recta (percorridos no sentido adequado), obtemos

$$\int_{I_R} f(z)\, dz \ = \ \int_0^R f(x)\, dx \qquad \text{e}$$

$$\begin{aligned}
\int_{I_{\frac{\pi}{3}}} f(z)\, dz \ &= \ -\int_0^R f(xe^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}) e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\, dx \\
&= \ -e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \int_0^R \frac{1}{(xe^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}})^6 + 1} dx \\
&= \ -e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \int_0^R \frac{1}{x^6 e^{2\pi \mathrm{i}} + 1} dx \\
&= \ -e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \int_0^R \frac{1}{x^6 + 1} dx
\end{aligned}$$

Então
$$\frac{\pi}{3}e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \;=\; \int_0^R f(x)\,dx + \int_{\gamma_R} f(z)\,dz - e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\int_0^R \frac{1}{x^6+1}dx$$
Fazendo $R \to \infty$ em ambos os membros da igualdade anterior, obtém-se
$$\frac{\pi}{3}e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \;=\; \int_0^\infty f(x)\,dx + \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)\,dz - e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\int_0^\infty \frac{1}{x^6+1}dx.$$
Procedendo como na alínea **(a)**:
$$\Big|\int_{\gamma_R} f(z)dz\Big| \le \int_{\gamma_R} |f(z)|\,|dz| \le \frac{1}{R^6-1}\int_{\gamma_R}|dz| = \frac{1}{R^6-1}\,\frac{\pi R}{3} \longrightarrow 0$$
quando $R \to \infty$, pelo que
$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 0$$
Resulta pois que
$$\left(1 - e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)\int_0^\infty \frac{1}{x^6+1}dx \;=\; \frac{\pi}{3}e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}},$$
ou seja
$$\int_0^\infty \frac{1}{x^6+1}dx \;=\; \frac{\pi}{3}\,\frac{e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{1-e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}} \;=\; \frac{\pi}{3}\,\frac{\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \;=\; \frac{\pi}{3}$$
Finalmente, e como a função integranda é par:
$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^6+1} \;=\; \frac{2\pi}{3}.$$

6. Utilize o Teorema dos resíduos para mostrar as igualdades;

   (a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{sen}(4x)}{(x^2+1)}\,dx \;=\; \frac{\pi}{e^4}$

   (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2\cos(2x)}{(x^2+1)^2}\,dx \;=\; -\frac{\pi}{4e^2}$

Resolução:

(a) Considere-se a função complexa de variável complexa
$$f(z) = \frac{ze^{4\mathrm{i}z}}{z^2+1}\,dz$$

e para $R > 1$, a curva

$$C_R = I_R \cup \gamma_R \overset{\text{def}}{=} \{z = x \ : \ x \in [-R, R]\} \cup \{z = Re^{\mathrm{i}\theta} \ : \ \theta \in [0, \pi]\}$$

Pelo teorema dos resíduos

$$\oint_{C_R} f(z)\, dz \ = \ 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}(f, \mathrm{i})$$

Dado que as singularidades são pólos simples de f

$$\mathrm{Res}(f, \mathrm{i}) = \lim_{z \to i} (z - \mathrm{i}) f(z) = \lim_{z \to i} \frac{z e^{4\mathrm{i}z}}{(z + \mathrm{i})} = \frac{1}{2e^4}$$

Então

$$\oint_{C_R} f(z)\, dz \ = \ \frac{\pi\mathrm{i}}{e^4}$$

Por outro lado

$$\oint_{C_R} f(z)\, dz = \int_{I_R} f(z)\, dz + \int_{\gamma_R} f(z)\, dz,$$

ou seja

$$\frac{\pi\mathrm{i}}{e^4} \ = \ \int_{-R}^{R} f(x)\, dx \ + \ \int_{\gamma_R} f(z)\, dz;$$

fazendo $R \to \infty$, obtemos

$$\frac{\pi\mathrm{i}}{e^4} \ = \ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2 + 1} dx \ + \ \lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_R} f(z)\, dz.$$

Tendo em conta que, para $|z| = R$,

$$|f(z)| \ = \ \left| \frac{z}{z^2 + 1} \right| \ = \ \frac{|z|}{|z^2 + 1|} \ \leq \ \frac{R}{R^2 - 1} \ \longrightarrow \ 0 \qquad \text{quando } \ R \to \infty,$$

o lema de Jordan garante então que

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_R} f(z)\, dz = 0.$$

(Pode também justificar a aplicabilidade do lema de Jordan verificando que $\mathrm{Grau}(z^2 + 1) > \mathrm{Grau}(z)$).

Desta forma,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{4ix}}{x^2 + 1}\, dx \ = \ \frac{\pi\mathrm{i}}{e^4}$$

Pela fórmula de Euler

$$\frac{\pi\mathrm{i}}{e^4} \ = \ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos(4x)}{x^2 + 1}\, dx + \mathrm{i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\mathrm{sen}(4x)}{x^2 + 1}\, dx,$$

o que nos permite concluir que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\text{sen}(4x)}{x^2+1}\,dx \;=\; \frac{\pi}{e^4}.$$

(b) Dado que a função integranda é par, temos que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2\cos(2x)}{(x^2+1)^2}\,dx \;=\; \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\cos(2x)}{(x^2+1)^2}\,dx$$

Considere-se a função complexa de variável complexa

$$f(z) = \frac{z^2 e^{2\mathrm{i}z}}{(z^2+1)^2}$$

e para $R > 1$, a curva

$$\Gamma_R = I_R \cup \gamma_R \overset{\mathsf{def}}{=} \big\{z = x \;:\; x \in [-R, R]\big\} \cup \big\{z = Re^{i\theta} \;:\; \theta \in [0, \pi]\big\}$$

Pelo teorema dos resíduos

$$\oint_{\Gamma_R} f(z)\,dz \;=\; 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}(f, \mathrm{i})$$

Dado que as singularidades de f são pólos de ordem 2,

$$\mathrm{Res}(f, \mathrm{i}) \;=\; \lim_{z\to\mathrm{i}} \frac{d}{dz}\Big((z-\mathrm{i})^2 f(z)\Big) \;=\; \lim_{z\to\mathrm{i}} \frac{d}{dz}\Big(\frac{z^2 e^{2\mathrm{i}z}}{(z+\mathrm{i})^2}\Big) \;=\; \frac{\mathrm{i}}{4e^2}$$

(o aluno deve completar os passos omissos deste cálculo). Assim:

$$\oint_{\Gamma_R} f(z)\,dz \;=\; -\frac{\pi}{2e^2}$$

Por outro lado

$$\oint_{\Gamma_R} f(z)\,dz \;=\; \int_{I_R} f(z)\,dz \;+\; \int_{\gamma_R} f(z)\,dz$$

ou seja

$$-\frac{\pi}{2e^2} \;=\; \int_{-R}^{R} f(x)\,dx \;+\; \int_{\gamma_R} f(z)\,dz$$

Fazendo $R \to \infty$, obtemos

$$-\frac{\pi}{2e^2} \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2+1}dx \;+\; \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)\,dz$$

Dado que, sobre a circunferência $|z| = R$, $\left|\frac{z^2}{(z^2+1)^2}\right| \leq \frac{R^2}{(R^2-1)^2} \to 0$ quando $R \to \infty$, estamos em condições de utilizar o lema de Jordan para concluir que

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 0.$$

Como tal,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 e^{\mathrm{i}x}}{(x^2+1)^2} dx \;=\; -\frac{\pi}{2e^2}$$

Pela fórmula de Euler

$$-\frac{\pi}{2e^2} \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos(2x)}{(x^2+1)^2}\, dx \;+\; \mathrm{i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \operatorname{sen}(2x)}{(x^2+1)^2}\, dx,$$

o que nos permite concluir que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos(2x)}{(x^2+1)^2} dx = -\frac{\pi}{2e^2}$$

Finalmente

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^2 \cos(2x)}{(x^2+1)^2} dx = -\frac{\pi}{4e^2},$$

como se queria justificar.

2 Exercícios Propostos

1. Considere a função

$$f(z) = \frac{e^z - 1 - z - \frac{z^2}{2}}{z^3} + (z-1)e^{\frac{1}{z+1}}$$

(a) Determine e classifique todas as singularidades de f, calculando os respectivos resíduos.

(b) Aproveite o resultado da alínea anterior para calcular:

$$\oint_{|z+1|=\frac{11}{10}} f(z)\, dz$$

onde a curva é percorrida em sentido inverso.

2. Para $z \in \mathbb{C}$, considere a função definida por

$$f(z) = \frac{1}{z^3} + \frac{z}{e^{-\pi i z} - 1} - \frac{2}{z - \pi} e^{\frac{1}{(z-\pi)^2}}$$

(a) Classifique as singularidades de f e calcule os respectivos resíduos.

(b) Calcule

$$\oint_C f(z)\, dz$$

em que $C = \{z \,:\, |z - \frac{1}{7}| = \pi\}$ é percorrida uma vez em sentido directo.

3. Calcule os seguintes integrais impróprios e trigonométricos

(**a**) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$ (**b**) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$ (**c**) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} ax}{x^2+1}\,dx,\ a>0$

(**d**) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\,dx$ (**e**) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}\varphi}{4+3\mathrm{i}\operatorname{sen}\varphi}d\varphi$ (**f**) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\varphi)}{3+2\sqrt{2}\cos\varphi}d\varphi$

4. Mostre que

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(ax)}{x^2+b^2} = \frac{e^{-ab}}{b}\pi$$

para a e $b>0$.

5. Mostre que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

para $a>1$.

6. Calcule o integral

$$\oint_{|z|=3} \frac{z^3 e^{1/z}}{z^3+1}dz$$

onde a curva é percorrida uma vez em sentido inverso.

Sugestão: pode ser útil o método descrito no exercício resolvido **1.(b)**.

7. Seja F uma função inteira tal que

$$f(z) = F\left(\frac{1}{z-1}\right)$$

tem um pólo. Mostre que $F(z)$ é um polinómio.

8. Seja $f(z)$ uma função analítica em $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ que verifica:

- 0 é um pólo de ordem 3 com Res$(f,0)=0$
- quando $|z|\to+\infty$ tem-se que $f(z)\to 0$
- $f(1)=0$ e $\int_{-\mathrm{i}}^{\mathrm{i}} f(z)dz = 2\mathrm{i}$ ao longo de qualquer curva regular que não intersecta 0.

Determine $f(z)$.

9. Sendo $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ e considere

$$I(z) = \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos t}{t-z}dt$$

Determine $I(t)$.

3 Soluções de 6.2

1. **(a)** $z = 0$ é sing. removível, Res $(f, 0) = 0$; $z = -1$ é sing. essencial, Res $(f, -1) = -\frac{3}{2}$.
   (b) $-3\pi i$

2. **(a)** $z = 0$ é pólo de ordem 3, Res $(f, 0) = 0$; $z = \pi$ é sing. essencial, Res $(f, \pi) = -2$; $z = 2k$, com $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ são pólos simples e Res $(f, 2k) = \frac{2ki}{\pi}$ para $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$;
   (b) $-4\pi i$ ...

3. **(a)** $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$ **(b)** $\frac{\pi}{2}$ **(c)** $\frac{\pi}{2e^a}$ **(d)** $\frac{\pi}{e}$ **(e)** $-\frac{2\pi \mathrm{i}}{15}$ **(f)** π

6. $2\pi i$

8. $f(z) = \frac{-1+z}{z^3}$

9. $I(z) = I(x + \mathrm{i}y) = -2\pi e^{-y} \operatorname{sen} x$