Cálculo Diferencial e Integral III
$1^{\underline{o}}$ Semestre 2022/2023
Academia da Força Aérea

Ficha de Problemas sobre Teoremas da Divergência e de Stokes

1 Exercícios Resolvidos

1.1 Parametrização de Superfícies

1. Determine uma representação paramétrica para as superfícies definidas como se segue.

   (a) A superfície definida por $x + 2y + 3z = 4$, x, y e $z \in \mathbb{R}$.

   (b) O plano que passa pelo ponto $(1, 2, -3)$ e contém os vectores $(1, 1, -1)$ e $(1, -1, 1)$.

   (c) A esfera de centro na origem e de raio 4.

   (d) A superfície S caracterizada por $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e $z \geq 0$. (Apresente duas parametrizações distintas desta superfície S).

   (e) A superfície $z = 4 - y^2$ cortada pelos planos $x = 0$, $x = 2$ e $z = 0$.

   (f) A face do cilindro $(x - 2)^2 + z^2 = 4$ entre os planos $y = 0$ e $y = 3$.

   (g) A superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ situada entre os planos $z = \sqrt{3}/2$ e $z = -\sqrt{3}/2$.

   (h) A superfície de revolução, obtida por uma rotação de um ângulo de 2π radianos em torno do eixo Oy, da curva γ parametrizada por

   $$r(t) \;=\; \big(f(t), g(t), 0\big) \quad , \quad t \in [a, b]$$

   onde $f(t) > 0$ para qualquer $t \in [a, b]$.

Resolução:

(a) Trata-se do plano de equação $x+2y+3z=4$. Dado que $x=4-2y-3z$ (ou seja, os pontos da superfície são o gráfico de uma função $x=g(y,z)$) tomamos y e z como parâmetros e consideramos

$$\begin{cases} x = 4-2u-3v \\ y = u \\ z = v \end{cases} \quad , \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

como uma parametrização da superfície S. Também podemos considerar como parametrizações de S as funções vectoriais

$$\begin{cases} x = u \\ y = \frac{4-u-3v}{2} \\ z = v \end{cases} \quad , \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

onde considerámos x e z como parâmetros, e

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \frac{4-u-2v}{3} \end{cases} \quad , \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

onde considerámos x e y como parâmetros.

Outra parametrização surge naturalmente da equação vectorial de um plano. Atendendo aos vectores directores do plano, os quais podem ser facilmente obtidos a partir de três pontos do plano que não sejam colineares, é possível obter a equação vectorial do plano. De facto, consideremos os seguintes pontos do plano $x+2y+3z=4$

$$A(-1,1,1) \quad , \quad B(3,-1,1) \quad \text{e} \quad C(-4,1,2)$$

a que correspondem os vectores directores do plano

$$\overrightarrow{AB} = B-A = (4,-2,0) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{AC} = C-A = (-3,0,1)$$

O plano $x+2y+3z=4$ tem então por equação vectorial

$$(x,y,z) = A + t\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} \quad , \quad t,s \in \mathbb{R}$$

ou seja

$$(x,y,z) = (-1,1,1) + t(4,-2,0) + s(-3,0,1) \quad , \quad t,s \in \mathbb{R}.$$

Daqui resultam as equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = -1+4t-3s \\ y = 1-2t \\ z = 1+s \end{cases} \qquad (t,s) \in \mathbb{R}^2.$$

(b) A equação vectorial do plano é dada por

$$(x, y, z) = (1, 2, -3) + u(1, 1, -1) + v(1, -1, 1)$$

com u e $v \in \mathbb{R}$. Tem-se então que

$$\begin{cases} x = 1 + u + v \\ y = 2 + u - v \\ z = -3 - u + v \end{cases}$$

e, como tal, uma parametrização será

$$r(u, v) = (1 + u + v, 2 + u - v, -3 - u + v) \quad , \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

(c) Trata-se da superfície S definida pela condição $x^2 + y^2 + z^2 = 16$. Utilizando coordenadas esféricas,

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \operatorname{sen}\varphi \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases} \tag{1}$$

com $\theta \in]0, 2\pi[$ e $\varphi \in]0, \pi[$, vê-se que S é constituida por todos os pontos dados por (1) tais que $\rho = 4$; ou seja,

$$\begin{cases} x = 4 \cos\theta \operatorname{sen}\varphi \\ y = 4 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \\ z = 4 \cos\varphi \end{cases}$$

com $(\theta, \varphi) \in T =]0, 2\pi[\times]0, \pi[$. Assim sendo, a parametrização pretendida é:

$$g(\theta, \varphi) = \big(4 \cos\theta \operatorname{sen}\varphi, 4 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, 4 \cos\varphi\big) \qquad \text{para } (\theta, \varphi) \in T.$$

(d) Trata-se do hemisfério norte (a "metade superior") da superfície esférica de centro na origem, $(0, 0, 0)$, e raio 4. Como na alínea anterior, podemos considerar para S uma parametrização baseada nas coordenadas esféricas (1)

$$\begin{cases} x = 4 \cos\theta \operatorname{sen}\varphi \\ y = 4 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \\ z = 4 \cos\varphi \end{cases}$$

onde $\theta \in]0, 2\pi[$ mas $\varphi \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ (que nos dá os ângulos φ correspondentes apenas aos pontos do hemisfério norte da esfera).

Pode-se obter uma outra parametrização resolvendo a equação da esfera em ordem a z:

$$z = \pm\sqrt{16 - x^2 - y^2}.$$

Como $z > 0$ (hemisfério norte), a solução que nos interessa é a que corresponde ao sinal positivo. A projecção da esfera no plano xy é o disco

$$B = \Big\{(x.y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\Big\},$$

pelo que a parametrização é

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = \sqrt{16 - x^2 - y^2} \end{cases}$$

para $(x, y) \in B$, ou seja

$$g(x, y) = \Big(x, y, \sqrt{16 - x^2 - y^2}\Big), \qquad (x, y) \in B.$$

(e) A superfície obtém-se por translação da parábola $z = 4 - y^2$ segundo a direcção do eixo dos x (faça uma figura). É então conveniente usar x como um dos parâmetros. Dado que $z = 1 - y^2$, tomamos também y como parâmetro. Assim sendo,

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 4 - v^2 \end{cases}$$

onde $0 < x < 2$ implica que $0 \leq u \leq 2$. Por outro lado, sendo S cortada pelo plano $z = 0$ então $z > 0 \;\Leftrightarrow\; 4 - y^2 > 0 \;\Leftrightarrow\; -2 < v < 2$. Obteve-se assim a parametrização

$$r(u, v) = \big(u, v, 4 - v^2\big) \quad , \quad 0 < u < 2 \;\; , \;\; -2 < v < 2.$$

(f) Tratando-se de uma superfície cilíndrica com eixo na recta $(x, y, z) = (2, t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$, é de todo conveniente usar as coordenadas cilíndricas:

$$\begin{cases} x = 2 + \rho \cos\theta \\ y = t \\ z = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 + 2\cos\theta \\ y = t \\ z = 2\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

e uma parametrização será

$$r(t, \theta) = (2 + 2\cos\theta, t, 2\operatorname{sen}\theta) \quad , \quad 0 < t < 3 \;\; , \;\; 0 < \theta < 2\pi.$$

(g) Neste exercício é conveniente usar coordenadas esféricas. Assim, escolhendo os ângulos dessas coordenadas para parâmetros, vamos ter

$$\begin{cases} x = \sqrt{3}\,\operatorname{sen}\varphi\cos\theta \\ y = \sqrt{3}\,\operatorname{sen}\varphi\cos\theta \\ z = \sqrt{3}\cos\varphi \end{cases}$$

ou seja, a parametrização dada por:

$$r(\theta,\varphi) \;=\; \Big(\sqrt{3}\,\operatorname{sen}\varphi\cos\theta, \sqrt{3}\,\operatorname{sen}\varphi\cos\theta, \sqrt{3}\cos\varphi\Big)$$

Sabemos que a esfera foi cortada pelos planos <u>horizontais</u> $z = \sqrt{3}/2$ e $z = -\sqrt{3}/2$, o que não restringe θ; como tal, $\theta \in \,]0, 2\pi[$. Por outro lado, como qualquer ponto da superfície tem coordenada z no intervalo $\big]{-\sqrt{3}/2}, \sqrt{3}/2\big[$, temos que

$$-\tfrac{1}{2} < \cos\varphi < \tfrac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \arccos\tfrac{1}{2} < \varphi < \pi - \arccos\tfrac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \tfrac{\pi}{3} < \varphi < \tfrac{2\pi}{3}$$

Resulta então que $\varphi \in \big]\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\big[$.

(h) Cada um dos pontos de $\gamma(t) = \big(f(t), g(t)\big)$ descreve uma circunferência centrada num ponto do eixo Oy, e contida no plano $y = g(t)$ (que é paralelo ao plano coordenado xz); nesta rotação, a coordenada y permanece com o valor $g(t)$, enquanto (x, z) descreve uma circunferência de raio $f(t)$ centrada no ponto $(0, g(t), 0)$. Deste modo, obtém-se a superfície de revolução parametrizada por

$$r(t,\theta) \;=\; \Big(f(t)\cos\theta,\; g(t),\; f(t)\operatorname{sen}\theta\Big)$$

para $a < t < b$ e $0 < \theta < 2\pi$.

2. Identifique a superfície parametrizada por:

   (a) $r(u, v) = (v\cos u, v\operatorname{sen} u, v)$, $0 \le u \le 2\pi$ e $0 \le v \le h$, onde $h > 0$ é um real dado.

   (b) $r(u, v) = (1, u, v)$, $0 < u < 1$, $0 < v < 1$.

   (c) $r(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$ com $(u, v) \in D = \big\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \;:\; u^2 + v^2 < 1\big\}$.

Resolução:

(a) Como se vê, a superfície está parametrizada à custa de coordenadas cilindricas. Tomando isso em consideração, pode-se eliminar os parâmetros u e v como se segue:

$$x^2 + y^2 = v^2 \;\text{ e }\; z = v \quad\Leftrightarrow\quad z^2 = x^2 + y^2$$

A superfície é pois uma parte do cone com vértice no origem, geratriz $z = x$ e eixo de simetria coincidente com o eixo dos z. Olhando agora para o domínio dos parâmetros observa-se que $z = v$ é positivo e menor que h; assim, a superfície é a face lateral do cone dada por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, com $0 \leq z \leq h$.

(b) Trata de uma porção de um plano, dado que a parametrização é uma transformação linear. Ora $y = u$ e $z = v$ significam que y e z podem tomar quaisquer valores nos intervalos indicados. Assim, a equação cartesiana da superfície é

$$x = 1$$

com $0 < y < 1$ e $0 < z < 1$.

(c) Conforme se constata por eliminação dos parâmetros $u = x$ e $v = y$, a função $r(u, v)$ parametriza o parabolóide de equação

$$z = x^2 + y^2, \quad \text{com} \quad x^2 + y^2 < 1$$

equivalente a

$$z = x^2 + y^2 \quad \text{com} \quad 0 \leq z < 1.$$

Note que $z = u^2 + v^2 < 1$ é consequência de $u^2 + v^2 < 1$. O domínio $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ corresponde à projecção da superfície cónica $z^2 = x^2 + y^2$ e $0 \leq z < 1$ no plano xy.

1.2 Integral de Superfície e Fluxo

3. Calcule integral de superfície de $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1/4}$ sendo S a porção do paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ acima do plano xOy.

   Resolução:

Começemos por parametrizar a superfície. Dado que a interseção do parabolóide com o plano $z = 0$ é $x^2 + y^2 = 9$, consideraremos a parametrização

$$g(x, y) = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 9 - x^2 - y^2 \end{cases}$$

em que $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 9\}$. Sendo assim

$$
\begin{aligned}
\iint_S f(x,y,z)\,dS &= \iint_T f(x,y)\left\|\frac{\partial g}{\partial x}\times\frac{\partial g}{\partial y}\right\| dxdy \\
&= \iint_T \sqrt{x^2+y^2+1/4}\,\left\|(2x,2y,1)\right\| dxdy \\
&= \iint_T \sqrt{x^2+y^2+1/4}\,\sqrt{(2x)^2+(2y)^2+1}\,dxdy \\
&= \iint_T 2\sqrt{x^2+y^2+1/4}\,\sqrt{x^2+y^2+1/4}\,dxdy \\
&= 2\iint_T \left(x^2+y^2+\tfrac{1}{4}\right) dxdy
\end{aligned}
$$

Usando coordenadas polares neste último integral em $T \subset \mathbb{R}^2$

$$
\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\operatorname{sen}\theta \end{cases}
$$

em que $0 < \rho < 3$ e $0 < \theta < 2\pi$,

$$
\iint_S f\,dS = 2\int_0^{2\pi}\int_0^3 \left(\rho^2+\tfrac{1}{4}\right)\rho d\rho d\theta = 4\pi\left(\tfrac{\rho^4}{4}+\tfrac{\rho^2}{8}\right)\Big|_0^3 = \frac{171}{2}\pi
$$

4. Determine a área da superfície dada por

   (a) A parte inferior da esfera $x^2+y^2+z^2=2$ cortada pelo cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$

   (b) $z = x^2+y^2$ com $z \le 1$.

   (c) A fronteira do sólido limitado pelas superfícies $z=1$, $z=4$, $x^2+y^2=1$ e $z=x^2+y^2$.

Resolução:

(a) Sejam

$$
\begin{cases} x = r\operatorname{sen}\phi\,\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\phi\,\operatorname{sen}\theta \\ z = r\cos\phi \end{cases}
$$

Note-se que na esfera $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$. A intersecção da esfera com o cone é:

$$
x^2+y^2+z^2=2 \quad \text{e} \quad z=\sqrt{x^2+y^2} \quad\Rightarrow\quad z^2+z^2=2 \quad\Leftrightarrow\quad z^2=1 \quad\Leftrightarrow\quad z=1,
$$

pois $z \geq 0$. Logo,

$$1 = \sqrt{2}\operatorname{sen}\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \phi = \pi/4.$$

Para a parte da esfera que está abaixo do cone, temos pois que $\frac{\pi}{4} < \phi < \pi$. Assim sendo,

$$r(\phi,\theta) = (\sqrt{2}\operatorname{sen}\phi\cos\theta, \sqrt{2}\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \sqrt{2}\cos\phi)$$

com $\frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \pi$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Desta forma

$$\frac{\partial r}{\partial \phi} = (\sqrt{2}\cos\phi\cos\theta, \sqrt{2}\cos\phi\operatorname{sen}\theta, -\sqrt{2}\operatorname{sen}\phi)$$

e

$$\frac{\partial r}{\partial \theta} = (-\sqrt{2}\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \sqrt{2}\operatorname{sen}\phi\cos\theta, 0)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial \phi} \times \frac{\partial r}{\partial \theta} &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \sqrt{2}\cos\phi\cos\theta & \sqrt{2}\cos\phi\operatorname{sen}\theta & -\sqrt{2}\operatorname{sen}\phi \\ -\sqrt{2}\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & \sqrt{2}\operatorname{sen}\phi\cos\theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= (2\operatorname{sen}^2\phi\cos\theta, 2\operatorname{sen}^2\phi\operatorname{sen}\theta, 2\operatorname{sen}\phi\cos\phi) \end{aligned}$$

Disso resulta que

$$\left\|\frac{\partial r}{\partial \phi} \times \frac{\partial r}{\partial \theta}\right\| = \sqrt{4\operatorname{sen}^4\phi\cos^2\theta + 4\operatorname{sen}^4\phi\operatorname{sen}^2\theta + 4\operatorname{sen}^2\phi\cos^2\phi} = 2|\operatorname{sen}\phi| = 2\operatorname{sen}\phi$$

(pois $\frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \pi$). Assim,

$$\begin{aligned} Vol_2(S) &= \iint_D \left\|\frac{\partial r}{\partial \phi} \times \frac{\partial r}{\partial \theta}\right\| dA \\ &= \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} 2\operatorname{sen}\phi\, d\phi d\theta \quad = \quad 2\pi\big(2+\sqrt{2}\big) \end{aligned}$$

(b) A superfície S é uma porção do parabolóide de equação $z = x^2 + y^2$. Uma parametrização de S é (ver exercício 5(c)), é

$$g(u,v) = \big(u, v, u^2 + v^2\big)$$

com $D = \{u^2 + v^2 < 1\}$, e

$$\frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} = (2u, 2v, 1)$$

A área de superfície pedida é

$$Vol_2(S) = \iint_S \|(2u, 2v, 1)\| dS = \iint_D \sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}\, du\, dv$$

Atendendo a que D é o círculo de centro na origem e raio 1, podemos usar coordenadas polares ($x = \rho\ cos\theta$ e $y = \rho \operatorname{sen}\theta$) pelo que

$$Vol_2(S) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 + 4\rho^2} \rho\, d\rho\, d\theta \ = \frac{\pi(5\sqrt{5} - 1)}{6}$$

(c) O sólido é a parte interior ao parabolóide $z = x^2 + y^2$ e exterior à superfície cilíndrica $x^2 + y^2 = 1$ compreendida entre os planos horizontais $z = 1$ e $z = 4$. O seu topo, que designamos por S_T, é a coroa circular

$$1 < x^2 + y^2 < 4 \qquad \text{contida no plano } z = 4;$$

a superfície (lateral) interior, S_1, é a face do cilindro dada por $x^2 + y^2 = 1$ e a superfície (lateral) exterior, S_2, é o parabolóide $z = x^2 + y^2$, ambas entre os planos $z = 1$ e $z = 3$. Intersectando tanto o parabolóide como o cilindro com o plano $z = 1$ obtém-se a mesma curva: $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$. Assim, a base do sólido é uma curva que, como tal, não contribui para o valor da área. Assim sendo, e executando desde já o cálculo (elementar!) das áreas de S_T e S_1:

$$\begin{aligned} Vol_2(S) &= Vol_2(S_T) + Vol_2(S_1) + Vol_2(S_2) \\ &= \left(\pi \cdot 2^2 - \pi \cdot 1^2\right) \ + \ (2\pi \cdot 1) \cdot 3 \ + \ Vol_2(S_2) \\ &= 9\pi \ + \ Vol_2(S_2) \end{aligned}$$

Quanto à área de S_2 sabemos que

$$Vol_2(S_2) \ = \ \iint_{S_4} dS$$

Para calcular o integral, vamos começar por parametrizar a superfície. Em coordenadas cartesianas

$$g(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$$

onde $g : T \to S_2$, com $T = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 2\right\}$. Assim:

$$\begin{aligned} Vol_2(S_2) &= \iint_T \left\| \frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y} \right\| dx\, dy \\ &= \iint_T \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dx\, dy \end{aligned}$$

Mudando para coordenadas polares,

$$\begin{aligned} Vol_2(S_2) &= \int_0^{2\pi}\int_1^2 \left(4r^2+1\right)^{1/2} r\,dr\,d\theta \\ &= 2\pi\,\frac{2}{3\cdot 8}\left(4r^2+1\right)^{3/2}\Big|_1^2 = \frac{\pi}{6}\left(17^{3/2}-5^{3/2}\right) \end{aligned}$$

Finalmente

$$Vol_2(S) = 9\pi + \frac{\pi}{6}\left(17^{3/2}-5^{3/2}\right)$$

5. Seja $f : K \to \mathbb{R}$ de classe C^1 no compacto $K \subset \mathbb{R}^2$ com fronteira de conteúdo nulo e interior não-vazio. Mostre que a área da superfície $z = f(x,y)$, para $(x,y) \in K$, é dada pela fórmula

$$A = \iint_K \sqrt{1+\left(\tfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\tfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$$

Aproveite o resultado para determinar a área da porção do paraboloide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ que está entre os cilindros $x^2+y^2=1$ e $x^2+y^2=4$.

Resolução:

Uma parametrização da superfície, que designamos por S, é $g : K \to S$ dada por

$$g(x,y) = \big(x, y, f(x,y)\big).$$

A área de S é, pois, dada por

$$A = \iint_S dS = \iint_K \left\|\frac{\partial g}{\partial u}\times\frac{\partial g}{\partial v}\right\| dudv$$

Temos assim que

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial v} = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

e

$$\frac{\partial g}{\partial u}\times\frac{\partial g}{\partial v} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right).$$

Desta forma

$$A = \iint_K \sqrt{1+\left(\tfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\tfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$$

que é a fórmula pretendida.

Vamos aplicar esta fórmula ao cálculo pedido. Temos que

$$z = f(x,y) = y^2 - x^2$$

com $D = \big\{(x,y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\big\}$. Então:

$$\begin{aligned} A &= \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy \\ &= \iint_D \sqrt{1 + 4y^2 + 4x^2}\, dx\, dy. \end{aligned}$$

Usando coordenadas polares temos que

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r \operatorname{sen}\theta$$

pelo que $0 \leq \theta \leq \pi/2$ e $1 \leq r \leq 2$. Então

$$A = \int_0^{\pi/2} \int_1^2 \sqrt{1+4r^2}\, r\, dr\, d\theta = 2\pi \int_1^2 \sqrt{1+4r^2}\, r\, dr$$

Fazendo a mudança de variável $u = 1 + 4r^2$ (o que implica $5 \leq u \leq 17$ e $\frac{du}{dr} = 8r$. Então

$$A = \frac{2\pi}{8} \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{17}} u^{1/2}\, du = \frac{\pi}{6}\left(17^{3/2} - 5^{3/2}\right)$$

6. Considere a superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ y = x^2 + z^2 \ ; \ 1 < y < 4\},$$

Sabendo que S tem densidade de massa dada por $\alpha(x,y,z) = \sqrt{1 + 4(x^2+z^2)}$ calcule a massa total de S.

Resolução:

A massa de S é dada pelo integral

$$M(S) = \int_S \alpha\, dS$$

onde g representa uma parametrização da superfície S. Considerando a parametrização

$$g(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho^2, \rho \operatorname{sen}\theta) \quad , \quad 0 < \theta < 2\pi \quad , \quad 1 < \rho < 2$$

tem-se então que

$$M(S) \;=\; \int_0^{2\pi} \int_1^2 \alpha(g(\rho,\theta)) \left\| \frac{\partial g}{\partial \rho} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} \right\| \rho \, d\rho \, d\theta \;=\; 2\pi \int_1^2 (1+4\rho^2)\, \rho \, d\rho = 33\pi.$$

7. Mostre que 36π é o valor do fluxo do campo vectorial

$$F(x,y,z) = (0,0,z)$$

através da superfície esférica S definida por $x^2+y^2+z^2=9$ orientada para fora de S.

Resolução:

Atendendo às coordenadas esféricas, a superfície S pode ser parametrizada por

$$g(\theta,\phi) = (3 \operatorname{sen}\phi \cos\theta, 3 \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, 3\cos\phi)$$

para $\theta \in]0,2\pi[$ e $\phi \in]0,\pi[$. Temos

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = (-3 \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, 3 \operatorname{sen}\phi \cos\theta, 0) \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial \phi} = (3\cos\phi\cos\theta, 3\cos\phi \operatorname{sen}\theta, -3\operatorname{sen}\phi)$$

Como tal, a expressão do vector normal necessário ao cálculo do fluxo é dada por

$$\begin{aligned} \overrightarrow{N} &= \frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial \phi} \\ &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -3\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & 3\operatorname{sen}\phi\cos\theta & 0 \\ 3\cos\phi\cos\theta & 3\cos\phi\operatorname{sen}\theta & -3\operatorname{sen}\phi \end{vmatrix} \\ &= \left(-9\operatorname{sen}^2\phi\cos\theta, -9\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}^2\phi, -9\cos\phi\operatorname{sen}\phi\right) \end{aligned}$$

Para que a superfície tenha orientação para fora há que considerar o vector normal

$$-\overrightarrow{N} = \left(9\operatorname{sen}^2\phi\cos\theta, 9\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}^2\phi, 9\cos\phi\operatorname{sen}\phi\right)$$

que "aponta para cima"no hemisfério norte (onde $\phi \in]0,\pi/2[$) e aponta "para baixo"no hemisfério sul (onde $\phi \in]\pi/2,\pi[$. O fluxo do campo F ao longo da superfície S é dado pelo integral de superfície

$$\begin{aligned}
\iint_S F\cdot\nu\, dS &= \iint_D \big(0,0,z(\theta,\phi)\big)\cdot\big(-\overrightarrow{N}(\theta,\phi)\big)\, d\theta\, d\phi\\
&= \iint_D (3\cos\phi)\ (9\cos\phi\operatorname{sen}\phi)\, d\theta\, d\phi\\
&= 27\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\phi\cos^2\phi\, d\phi\, d\theta\\
&= 27\cdot 2\pi\cdot \left.\frac{-\cos^3\phi}{3}\right|_0^{\pi} \;=\; 27\cdot 2\pi\cdot\frac{2}{3}\\
&= 36\pi.
\end{aligned}$$

1.3 Teorema da Divergência

8. Use o Teorema da divergência para calcular o valor de

$$\iint_S F\cdot\nu\, dS$$

em que

(a) $F(x,y,z) = (\operatorname{sen}(\pi x), zy^3, z^2{+}4x)$ e S é a superfície do paralelipípedo $-1\le x\le 2$, $0\le y\le 1$ e $1\le z\le 4$.

(b) $F(x,y,z) = (2xz, 1-4xy^2, 2z-z^2)$ e S é a superfície do sólido limitado por $z = 6-2x^2-2y^2$ e o plano $z=0$.

(c) $F(x,y,z) = (-2xy, y^2, 3z)$ e S a superfície que limita o sólido

$$B = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2+z^2\le 1\ \text{ e }\ z\ge x+y\}$$

Resolução:

(a) Vamos usar o Teorema da divergência na seguinte forma:

$$\iint_S F\cdot\nu\, dS = \iiint_E \operatorname{div} F dV$$

sendo E o paralelipípedo limitado pelos planos $x=-1$, $x=2$, $y=0$, $y=1$, $z=1$ e $z=4$. Temos então que os limites de integração serão

$$-1\le x\le 2 \quad , \quad 0\le y\le 1 \quad , \quad 1\le z\le 4.$$

Por outro lado

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{sen}(\pi x)) + \frac{\partial}{\partial y}(zy^3) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2 + 4x) = \pi\cos(\pi x) + 3zy^2 + 2z$$

Basta-nos agora calcular o integral

$$\begin{aligned}\iint_S F \cdot \nu \, dS &= \iiint_E \operatorname{div} F \, dV \\ &= \int_{-1}^{2}\int_0^1\int_1^4 (\pi\cos(\pi x) + 3zy^2 + 2z) dz\, dy\, dx \\ &= \frac{135}{2}\end{aligned}$$

(b) Vamos usar o Teorema da divergência forma:

$$\iint_S F \cdot \nu \, dS = \iiint_E \operatorname{div} F dV$$

sendo E o sólido limitado pela superfície do parabolóide $z = 6 - 2x^2 - 2y^2$, $z \geq 0$. Assim,

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 < 3\,,\, 0 < z < 6 - 2x^2 - 2y^2\}$$

ou, usando coordenadas cilíndricas $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho \operatorname{sen}\theta$, $z = z$:

$$E = \{(\rho, \theta, z) \,:\, 0 < \rho < \sqrt{3}\,,\, 0 < \theta < 2\pi\,,\, 0 < z < 6 - 2\rho^2\}$$

Por outro lado

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial}{\partial x}(2xz) + \frac{\partial}{\partial y}(1 - 4xy^2) + \frac{\partial}{\partial z}(2z - z^2) = 2z - 8xy + 2 - 2z = 2 - 8xy$$

Assim

$$\begin{aligned}\iint_S F \cdot \nu \, dS &= \iiint_E \operatorname{div} F \, dV \\ &= \iiint_E (2 - 8xy)\, dV \\ &= \int_0^{\sqrt{3}}\int_0^{2\pi}\int_0^{6-2\rho^2} (2 - 8\rho^2\cos\theta\, \operatorname{sen}\theta)\rho\, dz\, d\theta\, d\rho \\ &= 18\pi\end{aligned}$$

(c) Vamos usar o Teorema da divergência na forma:

$$\iint_S F \cdot \nu \, dS = \iiint_B \operatorname{div} F \, dV$$

sendo B a bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ com $z \geq x + y$, ou seja acima do plano $z = x + y$. Note-se que iremos calcular o integral triplo de

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial}{\partial x}(-2xy) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(3z) = -2y + 2y + 3 = 3$$

em

$$B = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 < 1 \ \text{ e } \ x + y < z < \sqrt{1 - x^2 - y^2}\right\}$$

Usando coordenadas cilíndricas

$$x = \rho \cos\theta \quad , \quad y = \rho \operatorname{sen}\theta \quad , \quad z = z$$

onde $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $\rho(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta) \leq z \leq \sqrt{1 - \rho^2}$, temos que

$$\iint_S F \cdot \nu \, dS = \iiint_B 3 \, dV = 3 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{\rho(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)}^{\sqrt{1-\rho^2}} \rho \, dz \, d\theta \, d\rho = 2\pi$$

9. Use o teorema da divergência para calcular $\iint_S (2x + 2y + z^2) dS$ onde S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Resolução:

A superfície S em questão é a esfera unitária, que é a fronteira da bola unitária B dada por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ e tem um vector normal num ponto (x, y, z) da forma (x, y, z) (o qual aponta para "fora"). Observe que a função integranda é

$$2x + 2y + z^2 = (2, 2, z) \cdot (x, y, z) = (2, 2, z) \cdot \nu,$$

pois a normal unitária em cada ponto de ∂B é

$$\nu \ = \ \frac{\nabla(x^2 + y^2 + z^2 - 1)}{\|\nabla(x^2 + y^2 + z^2 - 1)\|} \ = \ \frac{1}{2}\big(2x, 2y, 2z\big) = (x, y, z).$$

Desta forma o integral que se pretende calcular é de facto o fluxo do campo $(2, 2, z)$ através de ∂B. Pelo teorema da divergência,

$$\begin{aligned}
\iint_S (2x + 2y + z^2) \, dS \ &= \ \iint_S (2, 2, z) \cdot (x, y, z) \, dS \\
&= \ \iiint_B \operatorname{div} F \, dV \\
&= \ \iiint_B dV = \mathsf{Vol}_3(B) = \frac{4\pi}{3}.
\end{aligned}$$

10. Seja S a parte do parabolóide $z = 2 - x^2 - y^2$ que está acima do plano $z = 1$. Calcule o fluxo do campo vectorial

$$F(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x, y, z)$$

através de S na direção da normal a S com terceira componente positiva. Note que F é da forma fG, onde f é um campo escalar e G um campo vectorial.

Resolução:

Vamos calcular

$$\iint_S F \cdot \nu \, dS$$

usando o teorema da divergência. Mais uma vez se constata que S não é uma superfície fechada e, assim, para que se possa usar o teorema é necessário "tapar" inferiormente S. Considere-se

$$\Sigma = S \cup T$$

em que T é a superfície $\{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 = 1 \ , \ z = 1\}$. Então Σ é uma superfície fechada, sendo V o sólido limitado por Σ e ν a normal exterior a Σ, tem-se que

$$\iint_\Sigma F \cdot \nu \, dS = \iint_V \operatorname{div} F \, dV$$

Dado que

$$\iint_\Sigma F \cdot \nu \, dS = \iint_S F \cdot \nu \, dS + \iint_T F \cdot \nu \, dS$$

obtém-se

$$\iiint_V \operatorname{div} F \, dV = \iint_S F \cdot \nu \, dS + \iint_T F \cdot \nu \, dS$$

e, como tal, o integral pedido é

$$\iint_S F \cdot \nu \, dS = \iiint_V \operatorname{div} F \, dV - \iint_T F \cdot \nu \, dS$$

Vamos calcular estes dois integrais. Por um lado, fazendo $r = ||(x, y, z)|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, temos $F = \frac{1}{r^3}(x, y, z)$ e (veja o exercício resolvido 6(a) da ficha 2)

$$\operatorname{div} F = 3r^{-3} - 3r^{-5}(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

e assim

$$\iiint_V \operatorname{div} F \, dV = 0$$

Por outro lado, em T tem-se $\nu = (0,0,-1)$ e assim $F\cdot\nu = -r^{-3}z$. Podemos parametrizar T por $g(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta, 1)$, com $0<\rho<1$ e $0<\theta<2\pi$. Então

$$\iint_T F\cdot\nu\,dS = -\int_0^1\int_0^{2\pi}(\rho^2+1)^{-3/2}\rho\,d\theta\,d\rho = \pi\left(\sqrt{2}-2\right)$$

e finalmente

$$\iint_S F\cdot\nu\,dS = \pi\left(2-\sqrt{2}\right)$$

11. Seja $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ e considere o campo vectorial $G(x,y,z) = \phi(r)(x,y,z)$, onde $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é de classe C^1 . Sabendo que $\phi(1) = 1$ e $\operatorname{div} G = 0$, determine ϕ sem calcular div G directamente.

Resolução:

Estando G definido em $\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$, consideremos o conjunto

$$V = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ : \ 1 < x^2+y^2+z^2 < R\}$$

Note-se que a fronteira de V é constituída por duas superfícies esféricas de raios 1 e R, respectivamente. As respectivas normais unitárias e exteriores a V são os vectores $-(x,y,z)$ e $\frac{1}{R}(x,y,z)$. Aplicando o teorema de Gauss em V obtém-se

$$\iiint_V \operatorname{div} G\,dV = \iint_\Sigma G\cdot\nu\,dS$$

em que Σ é constituida pela esfera de raio 1, S_1 e pela esfera de raio R, S_R. Dado que $\operatorname{div} G = 0$

$$\iint_\Sigma G\cdot\nu\,dS = 0$$

ou seja

$$\iint_{S_1} G\cdot\nu\,dS + \iint_{S_R} G\cdot\nu\,dS = 0$$

Fazemos o cálculo do segundo integral, dado que para o primeiro basta fazer $R=1$, no resultado que vamos obter (e trocar o sinal, dado que a normal a S_1 aponta em sentido contrário à de S_R). Sendo $S_R = \{(x,y,z) \ : \ ||(x,y,z)|| = R^2\}$, tem-se que

$$G(x,y,z) = \phi(R)(x,y,z)$$

e assim

$$\begin{aligned}\iint_{S_R} G\cdot\nu\, dS &= \iint_{S_R} \phi(R)(x,y,z)\cdot\frac{1}{R}(x,y,z)\, dS\\ &= \frac{\phi(R)}{R}\iint_{S_R} ||(x,y,z)||^2 ds\\ &= R\,\phi(R)\,\mathrm{Vol}_2\,(S_R)\\ &= 4\pi\phi(R)R^3\end{aligned}$$

Fazendo $R=1$ e trocando o sinal, obtemos

$$\iint_{S_1} G\cdot\nu\, dS = -4\pi\phi(1)$$

Sabendo que $\phi(1)=1$, tem-se

$$-4\pi + 4\pi\phi(R)R^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi(R) = \frac{1}{R^3}$$

1.4 Teorema de Stokes

12. Usando o teorema de Stokes, calcule

$$\iint_S \operatorname{rot} F\cdot\overrightarrow{\nu}\, dS$$

nos casos que se seguem.

(a) S o hemisfério superior (isto é, $z>0$) da esfera $x^2+y^2+z^2=4$, em que se considera a normal ν com terceira componente positiva e

$$F(x,y,z) = \big(y,\,-x,\,yx^3\big)\,.$$

(b) S é a parte do plano $x+z=1$ no interior do cilindro $x^2+y^2\leq 1$, em que a normal $\overrightarrow{\nu}$ tem terceira componente positiva e

$$F(x,y,z) = \big(x,\,-z,\,y\big).$$

(c) S é formada pelo topo e pelos quatro lados (<u>não</u> inclui a base) do cubo de vértices $\big(\pm 1,\,\pm 1,\,\pm 1\big)$, em que $\overrightarrow{\nu}$ é a normal unitária exterior ao cubo e

$$F(x,y,z) = \big(xyz,\,xy,\,x^2yz\big)$$

Resolução:

(a) Dado que estamos nas condições do teorema de Stokes, pois F é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ e S é uma superfície orientável, podemos utilizar este teorema.

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \overrightarrow{\nu}\, dS = \oint_\gamma F \cdot d\gamma$$

sendo $\gamma = \partial S$ o bordo de S, orientado de forma compatível com a normal indicada. O caminho γ é a interseção da esfera com o plano $z = 0$, ou seja, $x^2 + y^2 = 4$ percorrida em sentido directo (quando vista de cima); como tal, pode ser parametrizada por

$$\gamma(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t, 0), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Sendo $F(x,y,z) = (y,\, -x,\, yx^3)$, resulta pois que:

$$\begin{aligned}
\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \overrightarrow{\nu}\, dS &= \oint_{\partial S} F \cdot d\gamma \\
&= \oint_\gamma \big(y,\, -x,\, yx^3\big) \cdot (dx, dy, dz) \\
&= \int_0^{2\pi} \big(2\operatorname{sen} t,\, -2\cos t,\, 16\operatorname{sen} t\cos^3 t\big) \cdot (-2\operatorname{sen} t, 2\cos t, 0)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \big(-4\operatorname{sen}^2 t - 4\cos^2 t\big)\, dt \ = \ -8\pi
\end{aligned}$$

(b) Para determinar o bordo de S, calculamos a intersecção da superfície cilíndrica $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $x + z = 1$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

Projectando ∂S no plano xy, obtém-se a circunferência $x(\theta) = \cos\theta$, $y(\theta) = \operatorname{sen}\theta$, onde $\theta \in [0, 2\pi]$. Da equação do plano (que contém S e ∂S) $z = 1 - x$, pelo que a parametrização do bordo é:

$$\begin{cases} x(\theta) = \cos\theta \\ y(\theta) = \operatorname{sen}\theta \\ z(\theta) = 1 - \cos\theta \end{cases} \qquad \text{para } \theta \in [0, 2\pi].$$

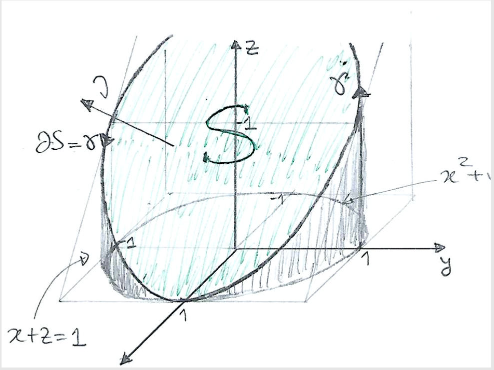

Figura 1: S é a intersecção do cilindro $x^2+y^2<1$ com o plano $x+z=1$ e $\partial S=\gamma$ é uma elipse.

Temos então que o bordo tem a parametrização

$$\gamma(\theta)=\big(\cos\theta,\ \operatorname{sen}\theta,\ 1-\cos\theta\big), \qquad \text{com} \quad \theta\in[0,2\pi].$$

Note que S é orientável e o seu bordo, γ, tem sentido compatível com a normal dada. Além disso, $F(x,y,z)=(x,-z,y)$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$. Pelo teorema de Stokes:

$$\begin{aligned}
\iint_S \operatorname{rot} F\cdot\overrightarrow{\nu}\,dS &= \oint_\gamma F\cdot d\gamma\\
&= \int_0^{2\pi} (\cos\theta,\ \cos\theta-1,\ \operatorname{sen}\theta)\cdot(-\operatorname{sen}\theta,\ \cos\theta,\ \operatorname{sen}\theta)\ d\theta\\
&= \int_0^{2\pi} \big(-\cos\theta\operatorname{sen}\theta+\cos^2\theta-\cos\theta+\operatorname{sen}^2 t\big)\ d\theta\\
&= -\frac{1}{2}\underbrace{\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}2\theta\ d\theta}_{0}+\int_0^{2\pi} d\theta+\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos\theta\ d\theta}_{0}\\
&= 2\pi
\end{aligned}$$

(c) A superfície S é constituída por todas as faces do cubo, excepto a que está contida no plano $z=-1$. O seu bordo, ∂S, é formado por todas as arestas do cubo que estão contidas plano $z=-1$, sendo percorridas no sentido indicado na figura abaixo (e que é compatível com a orientação de S).

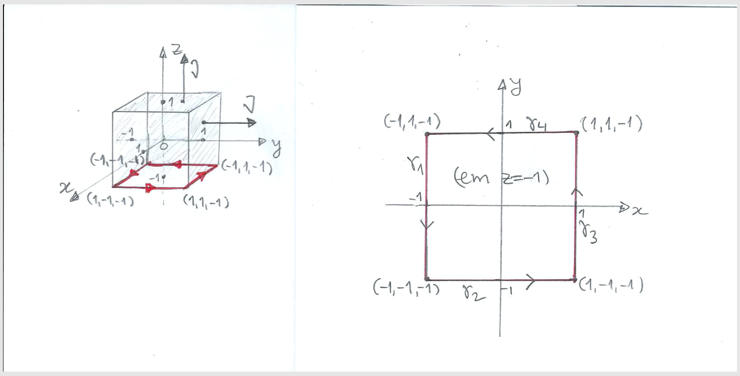

Figura 2: S e o bordo de S.

sendo $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ o bordo de S orientado de forma compatível com a normal indicada. Desta forma, γ é a concatenação dos segmentos de recta que formam as arestas da parte inferior do cubo, e que são parametrizadas por:

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= (-1,\,-t,\,-1) \qquad \text{com } t \in [-1,1];\\
\gamma_2(t) &= (t,\,-1,\,-1) \qquad \text{com } t \in [-1,1];\\
\gamma_3(t) &= (1,\,t,\,-1) \qquad \text{com } t \in [-1,1];\\
\gamma_4(t) &= (-t,\,1,\,-1) \qquad \text{com } t \in [-1,1].
\end{aligned}$$

Sendo $F(x,y,z) = (xyz,\, xy,\, x^2yz)$ de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ e S uma superfície orientável cujo bordo é uma curva de Jordan, resulta do teorema de Stokes que:

$$\begin{aligned}
\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \overrightarrow{\nu}\, dS &= \oint_{\partial S} F \cdot d\gamma\\
&= \sum_{i=1}^{4} \int_{\gamma_i} F \cdot d\gamma\\
&= \int_{-1}^{1} (-t,t,t) \cdot (0,-1,0)\, dt + \int_{-1}^{1} (t,-t,t^2) \cdot (1,0,0)\, dt\\
&\quad + \int_{-1}^{1} (-t,t,-t) \cdot (0,1,0)\, dt + \int_{-1}^{1} (t,-t,-t^2) \cdot (-1,0,0)\, dt\\
&= \int_{-1}^{1} \underbrace{(-t+t+t-t)}_{\overset{\shortparallel}{0}}\, dt \;=\; 0
\end{aligned}$$

13. Utilizando o teorema de Stokes, transforme o integral $\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \overrightarrow{\nu}\, dS$ num integral de linha (trabalho de F ao longo de um caminho) e calcule-o, sendo:

(a) S a superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, com $y \geq 0$, $\overrightarrow{\nu}$ a normal com segunda componente positiva e

$$F(x, y, z) \;=\; (y, x, x^2)$$

(b) S a superfície

$$\Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;;\; 0 \leq z \leq 1 \;,\; x^2 + y^2 = 1 \;,\; x \geq 0 \;,\; y \geq 0\Big\},$$

$\overrightarrow{\nu}$ a normal com componente em x positiva e

$$F(x, y, z) \;=\; (0, x, 0)$$

(c) S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geq 0$, com orientação na direcção do eixo dos x e

$$F(x, y, z) \;=\; \big(e^{xy} \cos z,\, (x^2 + 1)z,\, -y\big)\,.$$

Resolução:

(a) Pelo teorema de Stokes

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \overrightarrow{\nu}\, dS \;=\; \oint_{\partial S} F \cdot d\gamma$$

em que ∂S é o bordo da superfície S orientado de forma compatível com a escolha da normal. Neste caso, ∂S é a interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ com o plano $y = 0$, ou seja, é a curva $x^2 + z^2 = 4$, $y = 0$, com o sentido directo quando vista do ponto $(0, 2, 0)$.

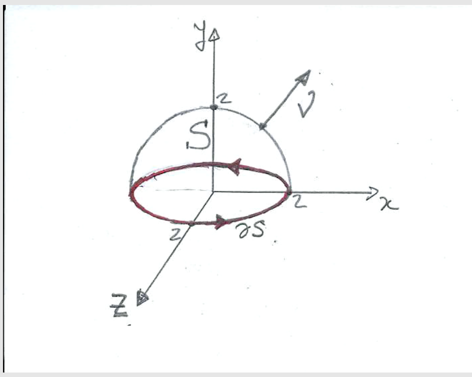

Figura 3: S e o bordo de S.

Assim (ver figura) uma parametrização de ∂S é

$$\gamma(\theta) \;=\; (2\cos\theta, 0, -2\operatorname{sen}\theta)\,, \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

Sendo $F(x,y,z) = (y,x,x^2)$, temos então:

$$\begin{aligned}
\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \overrightarrow{\nu}\, dS &= \oint_{\partial S} F \cdot d\gamma \\
&= \int_0^{2\pi} \big(0, 2\cos\theta, 4\cos^2\theta\big) \cdot (-2\operatorname{sen}\theta, 0, -2\cos\theta)\, d\theta \\
&= -8\int_0^{2\pi} \cos^3\theta\, d\theta \;=\; -8\int_0^{2\pi} \big(\cos\theta - \operatorname{sen}^2\theta\cos\theta\big)\, d\theta \\
&= -8\left(\operatorname{sen}\theta - \frac{\operatorname{sen}^3\theta}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi} \;=\; 0
\end{aligned}$$

(b) Pelo teorema de Stokes

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \overrightarrow{\nu}\, dS = \oint_{\partial S} F \cdot dr$$

em que C é o bordo da superfície S orientada de forma compatível com a escolha da normal. S é a parte da superfície cilíndrica $x^2 + y^2 = 1$ com $x > 0$, $y > 0$ e $0 < z < 1$:

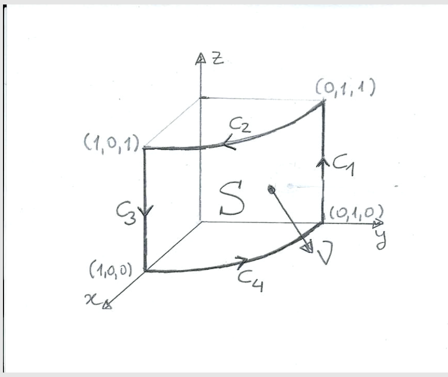

Figura 4: S e o bordo de S.

Neste caso, o bordo de S é uma curva seccionalmente regular constituida por 4 caminhos regulares, para os quais vamos usar as parametrizações:

$$\begin{aligned}
g_1(z) &= (0,1,z), & z &\in [0,1] & &(\text{de } C_1); \\
g_2(t) &= (\cos t, \operatorname{sen} t, 1), & t &\in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right] & &(\text{de } -C_2); \\
g_3(z) &= (1,0,z), & z &\in [0,1] & &(\text{de } -C_3); \\
g_4(t) &= (\cos t, \operatorname{sen} t, 0), & t &\in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right] & &(\text{de } C_4).
\end{aligned}$$

Para o campo vectorial $F(x,y,z) = (0,x,0)$, temos que

$$\int_{\partial S} F \cdot d\gamma \;=\; \int_{\partial S} x\,dy$$

Desta forma, e calculando os integrais de linha de F ao longo dos caminhos C_i, $i = 1,2,3,4$, que verificam $\partial S = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$:

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} x\,dy &= \int_0^1 0\,dz \;=\; 0\\
\int_{C_3} x\,dy &= -\int_0^1 0\,dz \;=\; 0\\
\int_{C_2} x\,dy &= -\int_0^{\pi/2} \cos t\,(\operatorname{sen} t)'\,dt \;=\; -\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt\\
\int_{C_4} x\,dy &= \int_0^{\pi/2} \cos t\,(\operatorname{sen} t)'\,dt \;=\; \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt \;=\; -\int_{C_2} x\,dy
\end{aligned}$$

Em conclusão, e tendo em conta que os integrais ao longo de C_2 e C_4 cancelam:

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \overrightarrow{\nu}\,dS \;=\; \sum_{k=1}^{4} \oint_{C_k} F \cdot d\gamma \;=\; \sum_{k=1}^{4} \int_{C_i} x\,dy \;=\; 0.$$

(c) Pelo teorema de Stokes

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \overrightarrow{\nu}\,dS \;=\; \oint_{\partial S} F \cdot d\gamma$$

em que ∂ é o bordo da superfície S orientada de forma compatível com a escolha da normal indicada. Neste caso, ∂S é a interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ com o plano $x = 0$; trata-se da circunferência $x^2 + z^2 = 1$, $x = 0$, com o sentido directo quando vista do ponto $(1,0,0)$. Assim, uma parametrização (compatível com a orientação de S) do bordo de S é

$$g(\theta) = (0, \cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \quad , \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Sendo $F(x,y,z) \;=\; \big(e^{xy}\cos z,\; (x^2+1)z,\; -y\big)$, temos pois que:

$$\begin{aligned}
\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \overrightarrow{\nu}\,dS &= \oint_{\partial S} F \cdot d\gamma\\
&= \int_0^{2\pi} \big(\cos(\operatorname{sen}\theta),\, \operatorname{sen}\theta,\, -\cos\theta\big) \cdot \big(0,\, -\operatorname{sen}\theta,\, \cos\theta\big)\,d\theta\\
&= \int_0^{2\pi} \big(-\operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta\big)\,d\theta \;=\; -2\pi
\end{aligned}$$

14. Use o teorema de Stokes para calcular $\oint_C F \cdot d\mathbf{r}$ onde:

(a) C é a curva de interseção do plano $z = 2$ com o cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, percorrida no sentido anti-horário quando vista do ponto $(0, 0, 5)$ e

$$F(x, y, z) \;=\; \big(x^2 - y,\, 4z,\, x^2\big)\,.$$

(b) C é o triângulo de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, percorrido no sentido positivo quando visto do ponto $(5, 5, 5)$ e

$$F(x, y, z) \;=\; \big(x + y^2,\, y + z^2,\, z + x^2\big)\,.$$

Resolução:

(a) Pelo teorema de Stokes, temos que

$$\oint_C F \cdot d\mathbf{r} \;=\; \iint_S \operatorname{rot} F \cdot \overrightarrow{\nu}\, dS$$

sendo S uma superfície cujo bordo é C e orientada de forma compatível com o sentido indicado para C. Deve notar que pode usar qualquer superfície nessas condições. Assim sendo, e em vez da superfície cónica sugerida pelo enunciado, consideramos o círculo

$$S = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 + y^2 < 4,\; z = 2\Big\}.$$

Note que S é a base do cone $\sqrt{x^2 + y^2} < z < 2$, pelo que o bordo de S coincide com C. Parametrizando S por

$$g(\rho, \theta) \;=\; \big(\rho\cos\theta,\, \rho\operatorname{sen}\theta,\, 2\big) \qquad \text{com} \;\; \rho \in \,]0, 2[\,, \;\; \theta \in \,]0, 2\pi[\,,$$

a orientação associada a g é

$$\frac{\partial g}{\partial \rho} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} \;=\; \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\rho\operatorname{sen}\theta & \rho\cos\theta & 0 \end{vmatrix} \;=\; (0, 0, \rho).$$

Esta orientação é compatível com o sentido de S — que é o sentido directo, quando C é vista de $(0, 0, 5)$. Por outro lado:

$$\operatorname{rot} F \;=\; \begin{vmatrix} e_2 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - y & 4z & x^2 \end{vmatrix} \;=\; (-4, -2x, 1)$$

Pelo teorema de Stokes:

$$\begin{aligned}
\int_C F \cdot d\mathbf{r} &= \iint_S \operatorname{rot} F \cdot \nu \, dS \\
&= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \big(-4,\ -2\rho\cos\theta, 1\big) \cdot (0,0,\rho)\, d\theta\, d\rho \\
&= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \rho \, d\theta\, d\rho \;=\; 2\pi \Big(\frac{\rho^2}{2} \Big|_0^2 \Big) \;=\; 4\pi.
\end{aligned}$$

(b) Pelo teorema de Stokes temos que

$$\oint_C F \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot} F \cdot \overrightarrow{\nu}\, dS$$

sendo S uma superfície cujao bordo é C e $\overrightarrow{\nu}$ a normal a S compatível com o sentido indicado para C. Sendo que um vector normal ao plano que contém os três vértices do triângulo é $(1,1,1)$, a equação deste plano é

$$(x-1, y, z) \cdot (1,1,1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + y + z = 1.$$

Consideramos a seguinte parametrização do triângulo:

$$g(x,y) = (x, y, 1 - x - y),$$

com g está definida na projecção do triângulo sobre o plano xy:

$$T = \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 < x < 1,\, 0 < y < 1 - x \Big\}$$

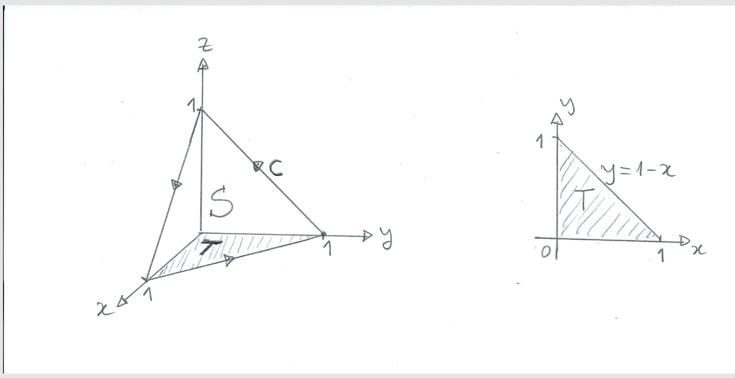

Figura 5: A curva C, uma superfície plana, S, cujo bordo é C, e o domínio de g, T.

A orientação associada a esta parametrização é

$$\overrightarrow{n} \;=\; \frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v} \;=\; \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \;=\; (1,1,1)\,,$$

sendo compatível com o sentido de C; note que em caso contrário bastaria tomar $-\overrightarrow{n}$ no lugar de $\overrightarrow{n}$, no cálculo que se segue.

Por outro lado:

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x+y^2 & y+z^2 & z+x^2 \end{vmatrix} = (-2z, -2x, -2y) = -2(z, x, y)$$

Pelo teorema de Stokes:

$$\begin{aligned} \oint_C F \cdot d\mathbf{r} &= \iint_S \operatorname{rot} F \cdot \nu \, dS \\ &= \iint_T -2(1-x-y, x, y) \cdot (1,1,1) \, dA \\ &= -2 \iint_T (\underbrace{1-x-y+x+y}_{\overset{\shortparallel}{1}}) \, dA \\ &= -2 \iint_T dA = -2 \operatorname{Vol}_2(T) = -2\left(\tfrac{1}{2}\right) = -1 \end{aligned}$$

15. Considere o campo vectorial

$$G(x,y,z) = \big(yz,\, -xz,\, z^2\big)$$

e a superfície

$$S = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2 = 1+z \ , \ 0 < z < 1\Big\}.$$

Calcule o fluxo do rotacional de G através de S, segundo a normal com terceira componente negativa, usando:

(a) o teorema de Stokes;

(b) o teorema da divergência.

Resolução:

(a) A superfície S é dada por $z = x^2+y^2-1$, com

$$0 < z < 1 \qquad \Rightarrow \qquad 0 < x^2+y^2-1 < 1 \qquad \Rightarrow \qquad 1 < x^2+y^2 < 2.$$

Podemos pois parametrizá-la por

$$g(x,y) \;=\; \big(x,\, y,\, x^2+y^2-1\big),$$

com g definida na coroa circular

$$A \;=\; \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1 < x^2+y^2 < 2\Big\}.$$

Como se pode ver pela figura seguinte, trata-se de uma superfície não elementar. Um vector normal a S é

$$\overrightarrow{n} \;=\; \frac{\partial g}{\partial x}\times\frac{\partial g}{\partial y} \;=\; \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} \;=\; \big(-2x,\, -2y,\, 1\big)$$

Como necessitamos da normal a S com terceira componente negativa, tomamos $-\overrightarrow{n}$. Em consequência, para obter uma parametrização para o bordo de S que seja compatível com esta orientção precisamos que a fronteira de ∂A, que designamos por γ, seja percorrida no sentido inverso (ver figura).

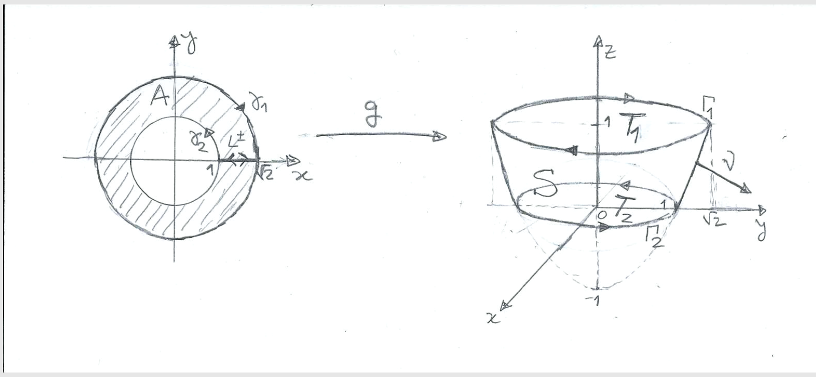

Figura 6: Determinação do bordo da superfície S.

Como tal, consideramos $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, onde

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= \big(\sqrt{2}\cos t,\, -\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, t\big), \qquad t\in[0,2\pi], \\ \gamma_2(t) &= \big(\cos t,\, \mathrm{sen}\, t\big), \qquad t\in[0,2\pi]. \end{aligned}$$

Note que L^+ e L^- cancelam, pois são a mesma curva percorrida em sentidos inversos. Resulta então que o bordo de S é $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, onde

$$\begin{aligned} \Gamma_1(t) &= g\circ\gamma_1(t) = \big(\sqrt{2}\cos t,\, -\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, t,\, 1\big), \qquad t\in[0,2\pi], \\ \Gamma_2(t) &= g\circ\gamma_2(t) = \big(\cos t,\, \mathrm{sen}\, t,\, 0\big), \qquad t\in[0,2\pi]. \end{aligned}$$

De acordo com o Teorema de Stokes, e notando que $G = 0$ em Γ_2, temos:

$$\begin{aligned}
\iint_S \operatorname{rot} G \cdot \nu \, dS &= \int_\Gamma G \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1} G \cdot d\mathbf{r} + \underbrace{\int_{\Gamma_2} G \cdot d\mathbf{r}}_{\overset{\shortparallel}{0}} \\
&= \int_0^{2\pi} \big(-\sqrt{2}\operatorname{sen} t, \, -\sqrt{2}\cos t, \, 1\big) \cdot \big(-\sqrt{2}\operatorname{sen} t, \, -\sqrt{2}\cos t, \, 0\big) \, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \big(2\operatorname{sen}^2 t + 2\cos^2 t\big) \, dt \\
&= \int_0^{2\pi} 2 \, dt = 4\pi.
\end{aligned}$$

(b) Uma vez que o teorema da divergência só se aplica a superfícies que são fronteira de domínios regulares, acrescentamos à superfície S os círculos

$$\begin{aligned}
T_1 &= \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = 0 \ \text{ e } \ x^2 + y^2 \le 2\Big\} \\
T_2 &= \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = 1 \ \text{ e } \ x^2 + y^2 \le 1\Big\}.
\end{aligned}$$

Em linguagem informal, podemos dizer que T_1 é a "tampa" do sólido D e T_2 o seu "fundo" (ver figura da alínea **(a)**), onde

$$D = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 < 1 + z \ \text{ e } \ 0 < z < 1\Big\}.$$

Assim sendo, $\partial D = T_1 \cup T_2 \cup S$. Sendo

$$\operatorname{rot} G = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & -xz & z^2 \end{vmatrix} = (x, y, -2z) :$$

aplicamos agora o teorema da divergência ao campo vectorial $\operatorname{rot} G$, por forma a verificarmos que o fluxo deste campo é, de facto, nulo:

$$\iint_{\partial D} \operatorname{rot} G \cdot \nu \, dS = \iiint_D \underbrace{\operatorname{div}(\operatorname{rot} G)}_{\overset{\shortparallel}{0}} \, dV = 0.$$

Por outro lado, como $\partial D = T_1 \cup T_2 \cup S$:

$$\iint_S \operatorname{rot} G \cdot \nu \, dS + \iint_{T_1} \operatorname{rot} G \cdot \nu \, dS + \iint_{T_2} \operatorname{rot} G \cdot \nu \, dS = \iint_{\partial D} \operatorname{rot} G \cdot \nu \, dS = 0.$$

Utilizando

$$
\begin{aligned}
g_1(x,y) &= (x,y,1) && \text{definida em } D_1 = \{(x,y) : x^2+y^2 < 2\}, \\
g_2(x,y) &= (x,y,0) && \text{definida em } D_2 = \{(x,y) : x^2+y^2 < 1\},
\end{aligned}
$$

como parametrizações de T_1 e T_2, respectivamente, resulta assim que:

$$
\begin{aligned}
\iint_S \operatorname{rot} G \cdot \nu \, dS &= -\iint_{T_1} \operatorname{rot} G \cdot \nu \, dS - \iint_{T_2} \operatorname{rot} G \cdot \nu \, dS \\
&= -\iint_{D_1} (x,y,-2)\cdot(0,0,1)\, dA - \iint_{D_2} \underbrace{(x,y,0)\cdot(0,0,-1)}_{\overset{\shortparallel}{0}}\, dA \\
&= 2\iint_{D_1} dA = 2\pi\left(\sqrt{2}\right)^2 = 4\pi.
\end{aligned}
$$

16. Obtenha um potencial vectorial dos campos abaixo.

   (a) $F(x,y,z) = (-y, z, 3x)$
   (b) $F(x,y,z) = \big(yz, x, xy^2\big)$

Resolução:

(a) Para que exista tal campo é necessário que $\operatorname{div} F = 0$. Então

$$
\operatorname{div} F = \frac{\partial}{\partial x}\big(-y\big) + \frac{\partial}{\partial y}\big(z\big) + \frac{\partial}{\partial z}\big(3x\big) = 0 \qquad \text{em } \mathbb{R}^3,
$$

pelo que se confirma que existe um campo vectorial $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (dado que as componentes de F são de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$, sendo $\mathbb{R}^3$ simplesmente conexo) tal que

$$
\operatorname{rot} G = F. \tag{2}
$$

Para determinar $G = (G_1, G_2, G_3)$, determinamos uma solução da equação (2):

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rot} G &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ G_1 & G_2 & G_3 \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z}, \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x}, \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y}\right) = \big(-y, z, 3x\big).
\end{aligned}
$$

Assim, vamos calcular funções G_1, G_2 e G_3 tais que

$$\begin{cases} \frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z} = -y \\ \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x} = z \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} = 3x. \end{cases}$$

Sabemos que existe uma solução deste sistema tal que uma das componentes, G_1, G_2 ou G_3, é nula. Podemos considerar, por exemplo, $G_1(x, y, z) \equiv 0$, e assim

$$\begin{cases} \frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z} = -y \\ \frac{\partial G_3}{\partial x} = -z \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} = 3x. \end{cases}$$

Integrando a terceira e a segunda equações em ordem a x obtém-se:

$$\begin{aligned} G_2(x, y, z) &= \int 3x\,dx + A_1(y, z) = \frac{3}{2}x^2 + A_1(y, z) \\ G_3(x, y, z) &= -\int z\,dx + A_2(y, z) = -xz + A_2(y, z). \end{aligned}$$

Substituindo na primeira equação, tem-se que

$$\frac{\partial}{\partial y}\big(-xz + A_2(y, z)\big) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{3}{2}x^2 + A_1(y, z)\right) = -y\,,$$

ou seja,

$$\frac{\partial A_2(y, z)}{\partial y} - \frac{\partial A_1(y, z)}{\partial z} = -y\,. \tag{3}$$

Precisamos pois de determinar funções $A_1(y, z)$ e $A_2(y, z)$ que verifiquem a equação (3). Dado que temos uma equação e duas incógnitas, existem certamente soluções tais que $A_1(y, z) \equiv 0$ (por exemplo). Desta forma, resta determinar $A_2(y, z)$ tal que

$$\frac{\partial A_2(y, z))}{\partial y} = -y.$$

Primitivando em ordem a y, obtém-se

$$A_2(y, z) = \int (-y)\,dy + B(z) = -\frac{y^2}{2} + B(z)\,.$$

Em conclusão,

$$G_2(x, y, z) = \frac{3}{2}x^2, \qquad G_3(x, y, z) = -xz - \frac{y^2}{2} + B(z)\,,$$

ou seja,

$$G(x,y,z) = \left(0, \frac{3}{2}x^2, -xz - \frac{y^2}{2} + B(z)\right)$$

Observação. Note que o problema pede *apenas um* potencial vectorial e não *todos* os possíveis potenciais vectoriais, de F; para resolver este último problema não poderíamos ter feito as sucessivas escolhas que facilitam os cálculos, mas restringem o conjunto de funções onde se procura a solução. No entanto, do ponto de vista as aplicações, é em geral apenas necessária a determinação de um potencial vectorial, e não de todos.

(b) Para que exista tal campo é necessário que $\operatorname{div} F = 0$, o que é claramente verdadeiro em $\mathbb{R}^3$. Podemos assim concluir que existe um campo vectorial $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (dado que as componentes de F são de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$, e $\mathbb{R}^3$ é simplesmente conexo) tal que $\operatorname{rot} G = F$. Para determinar G vamos considerar $G = (G_1, G_2, G_3)$. Então

$$\operatorname{rot} G = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ G_1 & G_2 & G_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z}, \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x}, \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y}\right) = \left(yz, x, xy^2\right)$$

Assim temos que calcular funções G_1, G_2 e G_3 tais que

$$\begin{cases} \frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z} = yz \\ \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x} = x \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} = xy^2. \end{cases}$$

Podemos considerar (por exemplo) $G_3(x,y,z) \equiv 0$ e, assim,

$$\begin{cases} \frac{\partial G_2}{\partial z} = -yz \\ \frac{\partial G_1}{\partial z} = x \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} = xy^2. \end{cases}$$

Primitivando a primeira e a segunda equação em ordem a z, obtemos

$$G_2(x,y,z) = \int -yz\,dz + A_1(x,y) = -\frac{yz^2}{2} + A_2(x,y)$$

$$G_1(x,y,z) = \int x\,dz + A_2(x,y) = xz + A_1(x,y)$$

Substituindo na terceira equação,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{yz^2}{2} + A_2(x,y)\right) - \frac{\partial}{\partial y}\big(xz + A_1(x,y)\big) = xy^2,$$

que é equivalente a

$$\frac{\partial A_2(x,y))}{\partial x} - \frac{\partial A_1(x,y)}{\partial y} \;=\; xy^2.$$

Resta pois o problema de determinar funções $A_1(x,y)$ e $A_2(x,y)$ que verifiquem a equação acima. Mais uma vez para simplificar os cálculos, podemos (por exemplo) procurar soluções tais que $A_1(x,y) \equiv 0$. Vamos então determinar $A_2(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial A_2(x,y)}{\partial x} \;=\; xy^2.$$

Primitivando em ordem a x, obtemos

$$A_2(x,y) = \int (y)dx + B(y) = \frac{x^2y^2}{2} + B(y).$$

Dado que $B(y)$ é uma função arbitrária, podemos escolher $B(y) = 0$ (por exemplo). Um potencial vectorial para F em $\mathbb{R}^3$ é:

$$G(x,y,z) = \left(xz, -\frac{yz^2}{2} + \frac{x^2y^2}{2}, 0\right).$$

Neste tipo de problemas, pode ser boa ideia verificar, no final, que $\operatorname{rot} F = G$ (fica como exercício para o aluno).

2 Exercícios Propostos

2.1 Parametrização de Superfícies

1. Determine se os pontos $P(3,-1,5)$ e $Q(-1,3,4)$ pertencem à superfície parametrizada por $r(u,v) = (u+v, u^2-v, u+v^2)$.

2. Determine uma representação paramétrica das superfícies descritas por:

   (a) o plano que passa pelo ponto $(1,2,-3)$ e contém os vetores $(1,1,-1)$ e $(1,-1,1)$.

   (b) A porção do cilindro $y^2+z^2=16$ que se encontra entre os planos $x=0$ e $x=5$.

   (c) A porção no primeiro octante do cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$ entre os planos $z=0$ e $z=3$.

   (d) A parte do plano $z=x+3$ no interior do cilindro $x^2+y^2=1$.

3. Identifique e faça um esboço da imagem da superfície parametrizada por

   (a) $r(u,v) = (u, \sqrt{1-u^2-v^2}, v)$ com $u^2+v^2<1$

(b) $r(u,v) = (2\,\mathrm{sen}\,u, 3\cos u, v)$, $0 < v < 2$

(c) $r(u,v) = (v\cos u, v\,\mathrm{sen}\,u, \frac{1}{v^2})$ com $0 < u < 2\pi$ e $v > 0$.

(d) $r(u,v) = (u+v, 3-v, 1+4u+5v)$, para $u, v \in \mathbb{R}$.

2.2 Integral de Superfície e Fluxo

4. Calcule a área da superfície dada por:

   (a) $g(u,v) = (u, v, 1-u-v)$, $u \geq 0$, $v \geq 0$ e $u+v \leq 1$.

   (b) $g(u,v) = (u, v, 1-u-v)$ e $u^2+v^2 \leq 1$.

   (c) A superfície esférica $x^2+y^2+z^2 = 1$ que se encontra dentro do cone $z \geq \sqrt{x^2+y^2}$.

   (d) $g(u,v) = (u, v, u^2+v^2)$ e $u^2+v^2 \leq 4$.

   (e) $r(u,v) = (\cos u, v, \mathrm{sen}\,u)$ e $u^2+4v^2 \leq 1$.

   (f) Porção da superfície cilíndrica $z^2+x^2 = 4$ que se encontra no interior do cilindro $x^2+y^2 \leq 4$ e acima do plano xoy.

   (g) Porção do cilindro x^2+y^2 =1 entre os planos $z = 1$ e $z = 4$.

   (h) Superfície parametrizada por $x = u^2$, $y = uv$, $z = \frac{1}{2}v^2$, $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 2$.

5. Considere a superfície parametrizada por

$$g(u,v) = (uv, u+v, u-v)$$

   (a) Determine o valor de c de forma que o ponto $(c,1,0)$ pertença à superfície

   (b) Admitindo que se restringe o domínio de g ao disco $u^2+v^2 \leq 1$, calcule a área da parte da superfície correspondente.

6. Calcule o fluxo do campo vectorial F através da superfície S orientada da forma indicada, sendo:

   (a) Considere o campo vectorial

$$F(x,y,z) = (0, xz, 3xzy^2)$$

   e a superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = -x^2+y^3\ ,\ 0 < x < 1\ ,\ 0 < y < 1\}$$

   orientada com a normal unitária cuja terceira componente é positiva.

(b) $F(x,y,z) = (-y,x,z)$ e

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = x^2 + y^2 - 1 \ ; \ z < 0 \ ; \ y > 0\},$$

orientada com a normal unitária n tal que $n_z < 0$.

(c) $F(x,y,z) = (yz, xz, 2xy)$ e S o cone definido por

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad 0 < z < 1$$

orientado com a normal n com terceira componente positiva.

(d) $F(x,y,z) = h(r)(x,y,z)$, em que $r = x^2 + y^2 + z^2$ e $h :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ é uma função contínua, e S a esfera de raio igual a um, centro na origem e orientada com a normal n tal que $n(0,0,1) = (0,0,1)$.

2.3 Teorema da Divergência

7. Use o teorema da divergência para calcular $\iint_S F \cdot \nu \, dS$ onde

   (a) $F = (x, y, z^2)$ e S é a fronteira do sólido $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

   (b) $F(x,y,z) = (0, 0, x + y + z^2)$, S a fronteira do cilindro $x^2 + y^2 \leq 4$ e $0 \leq z \leq 3$ e ν é a normal unitária que aponta para fora o cilindro.

   (c) $F(x,y,z) = (y^3 e^z, -xy, x \operatorname{arctg} y)$ e S é a superfície da região delimitada pelos planos coordenados e o plano $x + y + z = 1$.

   (d) $F(x,y,z) = (y \operatorname{sen} x, y^2 z, x + 3z)$ e S é a superfície da região delimitada pelos planos $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ e $z = \pm 1$.

8. Use o teorema da divergência para calcular $\iint_S F \cdot n dS$ onde

$$F(x,y,z) \ = \ \left(z^2 x, \ \frac{1}{3} y^3 + \operatorname{tg} z, \ x^2 z + y^2\right)$$

   e S é o hemisfério superior da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

   Nota: S não é uma superfície fechada.

9. Seja $F = (z \operatorname{arctg} y^2, z^3 \ln(x^2 + 1), z)$. Determine o fluxo de F através da parte do parabolóide $x^2 + y^2 + z = 2$ que está acima do plano $z = 1$ e está orientada para cima.

   Nota: S não é uma superfície fechada.

2.4 Teorema de Stokes

10. Utilizando o teorema de Stokes, transforme o integral $\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \nu \, dS$ num integral de linha e calcule-o, sendo:

    (a) S a superfície $z = x^2 + y^2$ com $z \leq 1$, sendo ν a normal com componente z positiva e
    $$F(x, y, z) = (0, y, 0)\,.$$

    (b) S a superfície parametrizada por $R(u, v) = (u, v, 1 - u^2 - v^2)$, $u > 0$, $v > 0$, $u + v < 1$, sendo ν a normal com terceira componente positiva e
    $$F(x, y, z) = (y, -x^2, z).$$

11. Use o teorema de Stokes para calcular $\int_C F \cdot d\mathbf{r}$, em que:

    (a) C é a curva obtida a partir da intersecção do cilindro $x^2 + y^2 = 2y$ com o plano $y = z$, percorrida no sentido anti-horário quando vista de cima e
    $$F(x, y, z) = (y + z, -z, y)$$

    (b) C é a curva de intersecção do plano $x + z = 5$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 9$, percorrida no sentido directo quando vista de cima e
    $$F(x, y, z) = (xy, 2z, 3y)$$

12. Calcule o trabalho realizado pelo campo vectorial F ao longo da curva C, sendo:

    (a) C é a fronteira do polígono de vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 2, 1)$, e $(0, 2, 1)$ (percorridos neste sentido) e
    $$F(x, y, z) = (z^2, 2xy, 4y^2).$$

    (b) C o bordo da superfície
    $$S \;=\; \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; y^2 + z^2 = 1\;,\; 0 < x < 1\Big\},$$
    com a orientação induzida por uma parametrização à sua escolha, e
    $$F(x, y, z) = (z, -xy, -xz).$$

    (c) C é a curva parametrizada por
    $$\gamma(t) = \big(\cos t, \operatorname{sen} t, \cos(2t)\big) \quad , \quad t \in [0, 2\pi]$$
    e F o campo vectorial dado por
    $$F(x, y, z) \;=\; \big(x^2 - y, y^2 - x, y^2 - x^2 + z^3\big).$$

13. Considere a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = 1 - x^2 - y^2 \ ; x > 0 \ , \ y > 0 \ , \ z > 0\}.$$

   (a) Parametrize a superfície S.
   (b) Calcule a área de S.
   (c) Considere o campo vectorial $F(x, y, z) = (-y, x, z)$ e calcule o trabalho

   $$W = \int_{\partial S} F \cdot dr$$

   no sentido horário quando visto do ponto $(10, 10, 10)$, usando o Teorema de Stokes.
   (d) Determine o fluxo de $G(x, y, z) = (x, -y^4 - y, 4y^3 z + 2)$ através de S no sentido da normal com terceira componente positiva, usando o Teorema da Divergência.

14. Obtenha um potencial vectorial dos campos abaixo.

   (a) $F(x, y, z) = (yz, -xz, xy - 2)$
   (b) $F(x, y, z) = (y \operatorname{sen} z, y \operatorname{sen} z, \cos z)$

3 Soluções

1. P pertence à superfície e Q não pertence à superfície.

2. (a) $x = 1 + u + v$, $y = 2 + u - v$, $z = -3 - u + v$ com $u, v \in \mathbb{R}$
   (b) $x = u$, $y = 4\cos\theta$, $z = 4 \operatorname{sen}\theta$ com $0 \leq u \leq 5$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$
   (c) $x = r\cos(\theta)$, $y = r\operatorname{sen}(\theta)$, $z = r$, com $0 \leq r \leq 3$ e $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.
   (d) $x = r\cos(\theta)$, $y = r\operatorname{sen}(\theta)$, $z = 3 + r\cos(\theta)$, onde $0 \leq r \leq 1$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

3. (a) Semi superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $y \geq 0$.
   (b) Parte do cilindro $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ em $0 \leq z \leq 2$
   (c) Gráfico de $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$
   (d) O plano $4x - y - z = -4$.

4. (a) $A(S) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
   (b) $A(S) = \pi\sqrt{3}$
   (c) $A(S) = \pi(2 - \sqrt{2})$
   (d) $A(S) = \frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 1\right)$
   (e) $A(S) = \frac{\pi}{2}$

(f) 16

(g) 6π

(h) 4

5. (a) $c = \frac{1}{4}$

   (b) $A(S) = \left(\sqrt{6} - \frac{4}{3}\right) 2\pi$

6. (a) 0

   (b) $\pi/4$

   (c) 0

   (d) $4\pi h(1)$

7. (a) $\frac{8\pi}{3}$ (b) 36π (c) $-\frac{1}{24}$ (d) 24

8. $\frac{13}{20}\pi$

9. $3\pi/2$

10. (a) 0

    (b) $-\frac{5}{6}$

11. (a) -2π

    (b) 9π

12. (a) 3

    (b) 0

    (c) 0

13. (a) $g(u, v) = (u, v, 1 - u^2 - v^2)$, definida em $U = \{(u, v) : u^2 + v^2 < 1 \wedge u > 0 \wedge v > 0\}$

    (b) $\frac{\pi}{24}\left(5\sqrt{5} - 1\right)$

    (c) $-\frac{\pi}{2}$

    (d) $\frac{\pi}{2}$

14. (a) $\left(2y - \frac{x}{2}(y^2 + z^2), 0, \frac{y^2 z}{2}\right)$ (por exemplo)

    (b) $(0, (x + y)\cos z, -xy \operatorname{sen} z)$ (por exemplo)