

## ANÁLISE MATEMÁTICA IV

### FICHA AVANÇADA 2 – EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM

(estes exercícios destinam-se a quem já domina bem os exercícios das fichas normais)

- (1) Demonstre o teorema seguinte, ou exiba um contra-exemplo: Se  $f$  e  $g$  são funções contínuas  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  com  $|f(t)| \leq |g(t)|, \forall t$ , e se toda a solução de

$$\frac{dy}{dt} + fy = 0$$

satisfaz  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$ , então toda a solução de

$$\frac{dy}{dt} + gy = 0$$

satisfaz  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$ .

- (2) Seja  $n$  um inteiro positivo maior do que 1. Existe alguma função diferenciável  $y : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  cuja derivada seja a sua  $n$ -ésima potência,  $y^n$ , e cujo valor na origem seja positivo?

- (3) Determine todas as soluções constantes da equação

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y^3 - y}{1 + e^y}.$$

Qual é o limite  $t \rightarrow +\infty$  de uma solução  $y(t)$  que satisfaça  $y(0) = \frac{1}{2}$ ?

- (4) Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função continuamente diferenciável. Mostre que qualquer solução de  $\dot{y} = f(y(t))$  é monótona.

- (5) Mostre que qualquer solução  $y(t)$  (para  $t \geq 0$ ) da equação

$$\frac{dy}{dt} = y^2 - y^6$$

com  $y(0) > 0$  satisfaz  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 1$ .