Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA IV

FICHA AVANÇADA 4 – EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E SÉRIES DE FOURIER

(estes exercícios destinam-se a quem já domina bem os exercícios das fichas normais)

(1) Seja $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que
$$\int_0^\pi f(x)\sin(nx)\ dx = 0$$
para todos os inteiros $n \geq 1$. Será que f tem que ser a função identicamente nula?

(2) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função periódica de período 2π, tal que $f(x) = x^3$ para $-\pi \leq x < \pi$. Mostre que a série de Fourier de f tem a forma $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$ e escreva uma fórmula integral para b_n (sem a avaliar!). Prove que
$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \frac{2\pi^6}{7}\ .$$

(3) Mostre que, se $f : [-\ell, \ell] \to \mathbb{R}$ é seccionalmente diferenciável, então os seus coeficientes de Fourier a_n e b_n tendem para 0 quando $n \to \infty$.

(4) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua com a seguinte propriedade:
$$f(x) = f(x+1) = f(x+\sqrt{2})\ , \qquad \forall x \in \mathbb{R}\ .$$
Prove que f é constante.

(5) Determine a solução geral da equação $yy^{(2)} + \dot{y}^2 = 0$.

(6) Resolva o seguinte problema de valor inicial:
$$\begin{cases} y^{(2)} = (\dot{y})^3 \sin y \\ y(0) = 0\ , \quad \dot{y}(0) = 1\ . \end{cases}$$

(7) Considere a equação
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= -x + y \\ \frac{dy}{dt} &= \ln(20 + x) - y \end{cases}$$
Seja $(x(t), y(t))$ uma solução definida para todo o $t \geq 0$ com $x(0) > 0$ e $y(0) > 0$. Prove que $x(t)$ e $y(t)$ são limitadas.