Instituto Superior Técnico
Departamento de Matem·tica
SecÁ„o de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA IV

1º Teste

Cursos:
LCI, LEAmb, LEBL, LEGM, LEIC, LEM, LEMat, LEMG, LEQ, LQ

Justifique cuidadosamente todas as respostas.

Data: 29/10/2005, 11h
Duração: 1h30m

1. Considere a função complexa definida por

$$f(z) = f(x+iy) = 3x + 2xy + iv(x,y).$$

(a) Determine a função $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, sabendo que f é inteira e $f(i) = i$.

(b) Determine o valor do integral

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-i)^2}\, dz$$

onde $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ é percorrida uma vez no sentido directo.

Resolução:

(a) Por f ser inteira, u e v são harmónicas conjugadas em $\mathbb{R}^2$. Então

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 3 + 2y \quad \Leftrightarrow \quad v(x,y) = 3y + y^2 + C(x)$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \Leftrightarrow \quad 2x = -C'(x) \quad \Leftrightarrow \quad C(x) = -x^2 + k$$

Conclui-se que

$$v(x,y) = y^2 - x^2 + 3y + k \quad , \quad k \in \mathbb{R}$$

pelo que

$$f(z) = 3x + 2xy + i(y^2 - x^2 + 3y + k) = 3z - i(z^2 + k) \quad , \quad k \in \mathbb{R}$$

Dado que $f(i) = i$, teremos $k = 3$ e finalmente $f(z) = 3z - i(z^2 + 3)$

(b) Visto que f é inteira e $i \in \operatorname{int} C$, podemos aplicar a fórmula integral de Cauchy. Tem-se então que

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-i)^2}\, dz = 2\pi i f'(i) = 2\pi i \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Big|_{(0,1)} = 10\pi i$$

2. Obtenha o desenvolvimento em série de potências da função,

$$f(z) = \frac{z}{4z-3}$$

em torno de $z_0 = i$ e que converge no ponto $z = 4i$. Indique a região onde o desenvolvimento é válido.

Resolução:

A função f é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{\frac{3}{4}\}$, pelo que admitirá série de Taylor convergente em $|z-i| < \frac{5}{4}$ e série de Laurent convergente em $|z-i| > \frac{5}{4}$. Visto $4i$ pertencer à segunda região, é este o desenvolvimento que pretendemos obter. Assim, e fazendo $w = z - i$,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z}{4z-3} = \frac{w+i}{4w+4i-3} = \frac{w+i}{4w}\,\frac{1}{1-\frac{3-4i}{4w}} \\ &= \frac{w+i}{4w}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3-4i)^n}{4^n w^n} \end{aligned}$$

sendo a igualdade com a série válida porque $|\frac{3-4i}{4w}| = \frac{5}{4|w|} < 1$.

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3-4i)^n}{4^{n+1}w^n} + i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3-4i)^n}{4^{n+1}w^{n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3-4i)^n}{4^{n+1}(z-i)^n} + i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3-4i)^n}{4^{n+1}(z-i)^{n+1}} \quad \text{se} \quad |z-i| > \frac{5}{4} \end{aligned}$$

3. Calcule o valor do integral

$$\oint_\gamma \Big[\frac{z^2}{(z-1)\operatorname{sen}^2(\frac{\pi z}{2})} + \frac{e^{1/z}}{z}\Big]\, dz$$

em que $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| + |z-i| = 3\}$ percorrida uma vez no sentido directo.

Resolução:

Podemos escrever

$$f(z) = \frac{z^2}{(z-1)\operatorname{sen}^2(\frac{\pi z}{2})} + \frac{e^{1/z}}{z} = f_1(z) + f_2(z)$$

e pela linearidade do integral, tem-se que

$$\oint_\gamma f(z)\, dz = \oint_\gamma f_1(z)\, dz + \oint_\gamma f_2(z)\, dz$$

A função

$$f_1(z) = \frac{z^2}{(z-1)\operatorname{sen}^2(\frac{\pi z}{2})}$$

é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{z \,:\, z = 1\,,\, z = 2k\ k \in \mathbb{Z}\}$. Atendendo a que

$$|1-1| + |1-i| = \sqrt{2} < 3 \quad \Rightarrow \quad 1 \in \operatorname{int}\gamma$$

e

$$|2k-1| + |2k-i| = |2k-1| + \sqrt{4k^2+1} < 3 \quad \Leftrightarrow \quad k = 0$$

pelo que

$$\oint_\gamma f_1(z)\, dz = 2\pi i(\operatorname{Res}(f_1,1) + \operatorname{Res}(f_1,0))$$

Visto

$$\lim_{z\to 1}(z-1)f_1(z) = 1$$

conclui-se que 1 é um polo simples e $\operatorname{Res}(f_1,1) = 1$. Por outro ladp,

$$\lim_{z\to 0} f_1(z) = -\frac{4}{\pi^2}$$

conclui-se que 0 é uma singularidade removível e como tal $\text{Res}(f_1, 0) = 0$. Tem-se então que

$$\oint_\gamma f_1(z)\, dz = 2\pi i$$

A função $f_2(z) = \frac{e^{1/z}}{z}$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e como já verificámos $0 \in \text{int}\gamma$, tem-se que

$$\oint_\gamma f_2(z)\, dz = 2\pi i \text{Res}(f_2, 0)$$

Desenvovendo f_2 em potências de z, obtem-se

$$f_2(z) = \frac{1}{z}\Big(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3!z^3} + ...\Big) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2z^3} + \frac{1}{3!z^4} + ...$$

conclui-se que 0 é uma singularidade essencial de f_2 e que $\text{Res}(f_2, 0) = 1$, pelo que

$$\oint_\gamma f_2(z)\, dz = 2\pi i$$

Finalmente

$$\oint_\gamma f(z)\, dz = 4\pi i$$

4. *Utilizando* o Teorema dos Resíduos, determine

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{4x^2 + 1}\, dx$$

Resolução:

Considere-se a função complexa $F(z) = \dfrac{e^{iz}}{4z^2 + 1}$ e, para $R \in \mathbb{R}^+$ suficientemente grande, a curva

$$C_R = I_R \cup SC_R = \{z = x \in [-R, R]\} \cup \{z \,:\, |z| = R\,,\, \text{Im}\, z > 0\}$$

Visto F ser analítica em $\mathbb{C} \setminus \{\frac{i}{2}, -\frac{i}{2}\}$, aplicando o Teorema dos Resíduos obtem-se

$$\oint_{C_R} F(z)\, dz = 2\pi i \text{Res}(F, \frac{i}{2})$$

Dado que

$$\lim_{z\to i/2}(z-\frac{i}{2})F(z)=\frac{e^{-1/2}}{4i}$$

conclui-se que $i/2$ é um polo simples e que $\mathrm{Res}(F,i/2)=\frac{e^{-1/2}}{4i}$, e

$$\oint_{C_R} F(z)\,dz=\pi\frac{e^{-1/2}}{2}$$

Por outro lado

$$\pi\frac{e^{-1/2}}{2}=\oint_{C_R} F(z)\,dz=\int_{I_R} F(z)\,dz+\int_{SC_R} F(z)\,dz$$

e atendendo à definição de I_R

$$\pi\frac{e^{-1/2}}{2}=\int_{-R}^{R} F(x)\,dx+\int_{SC_R} F(z)\,dz$$

Fazendo $R\to\infty$

$$\pi\frac{e^{-1/2}}{2}=\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,dx+\lim_{R\to\infty}\int_{SC_R} F(z)\,dz$$

A função $F(z)=f(z)e^{iz}$, em que $f(z)=\frac{1}{4z^2+1}$ é analítica no semi plano superior excepto em $i/2$, e

$$|f(z)|\leq\frac{1}{4|z|^2-1}\to 0\quad\text{quando}\quad |z|\to\infty$$

Por aplicação do lema de Jordan, podemos concluir que

$$\lim_{R\to\infty}\int_{SC_R} F(z)\,dz=0$$

e como tal

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,dx=\pi\frac{e^{-1/2}}{2}$$

Finalmente, visto $x\in\mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^ix}{4x^2+1}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{4x^2+1}\,dx+i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{4x^2+1}\,dx=\pi\frac{e^{-1/2}}{2}$$

concluindo-se que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{4x^2+1}\, dx = \pi \frac{e^{-1/2}}{2}$$

6. Para cada $p \in \mathbb{Z}$, calcule e classifique as singularidades da função

$$f(z) = z^p \text{sen}\, \frac{1}{z}$$

Determine o(s) respectivo(s) resíduo(s).

Resolução:

A função f é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Desenvolvendo em série de Laurent

$$f(z) = z^p \Big(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - ....\Big)$$

concluindo-se que 0 é uma singularidade essencial de f. Por análise da série conclui-se que

$$\text{Res}(f,0) = \begin{cases} 0 & \text{se } \ p \in \mathbb{N} \\ \\ 0 & \text{se } \ p \leq 0 \text{ e } p \text{ é ímpar} \\ \\ \frac{1}{p!} & \text{se } \ p \leq 0 \text{ e } p \text{ é par} \end{cases}$$

6. Determine a solução do problema de valores iniciais

$$\begin{cases} y' = t - 2ty \\ \\ y(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

indicando o intervalo máximo de existência da solução.

Resolução:

Escrevendo a equação na forma

$$y' + 2ty = t$$

conclui-se que se trata de uma equação linear. Um factor integrante é

$$\mu(t) = e^{\int (2t)\, dt} = e^{t^2}$$

Multiplicando todos os termos da equação por $\mu(t)$, obtem-se

$$\frac{d}{dt}(e^{t^2} y) = te^{t^2} \quad \Leftrightarrow \quad e^{t^2} y = \frac{1}{2} e^{t^2} + C \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = \frac{1}{2} + Ce^{-t^2}$$

Para determinar a solução do PVI usa-se o facto de $y(0) = \frac{1}{2}$, o que implica $C = 0$. Como tal a solução do PVI é

$$y(t) = \frac{1}{2}$$

que está definida em $\mathbb{R}$.