Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA IV

1º Teste

(LEIC, LEEC, LEM,LEGM, LEMAT, LEN)

Justifique cuidadosamente todas as respostas.

Data: 29/04/2006, 11h00
Duração: 1h30.

(2 val.) 1) Seja $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2, e considere $u_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$u_\alpha(x, y) = x^2 - y^2 - \alpha(x)y.$$

a) Determine a forma geral da função α por forma que u_α seja uma função harmónica.

b) Determine uma função harmónica conjugada de $u(x, y) = x^2 - y^2 - 3xy$.

Resolução:

(a) Dado que por hipótese u_α é de classe C^2, podemos concluir que u_α é de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$ e como tal para que seja harmónica basta verificar em que casos se tem $\Delta u_\alpha = 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Assim,

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x} = 2x - \alpha'(x)y \quad , \quad \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2} = 2 - \alpha''(x)y$$

e

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial y} = -2y - \alpha(x) \quad , \quad \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial y^2} = -2$$

pelo que

$$\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial y^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha(x) = ax + b$$

para a e b constantes reais arbitrárias. Podemos então concluir que u_α é harmónica em $\mathbb{R}^2$ se e só se $\alpha(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) Por definição, u e a sua harmónica conjugada verificam as equações de Cauchy-Riemann. Como tal

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad v(x, y) = \int (2x - 3y)dy = 2xy - \frac{3y^2}{2} + C(x)$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad 2y + C'(x) = 2y + 3x \quad \Rightarrow \quad C(x) = \frac{3x^2}{2} + C$$

Conclui-se

$$v(x.y) = 2xy - \frac{3y^2}{2} + \frac{3x^2}{2} + C \quad , \quad C \in \mathbb{R}$$

(2 val.) 2) Considere a função de variável complexa definida por:

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 1}.$$

a) Determine o desenvolvimento em série de Laurent de f, válido na região $|z-1|>R$, indicando o valor de R.

b) **Utilize a alínea anterior** para determinar

$$\oint_\gamma f(z)\,dz,\ \gamma=\{z\in\mathbb{C}:|z|=2006\},$$

onde a curva γ é percorrida uma vez em sentido directo.

Resolução:

(a) A função f é analítica em $\mathbb{C}\backslash\{-1,1\}$, pelo que admitirá duas séries de Laurent em torno de $z_0=1$: uma convergente em $0<|z-1|<2$ e outra convergente em $|z-1|>2$ Vamos então obter, como pedido, o desenvolvimento de Laurent convergente em $|z-1|>2$, ou seja, convergente em $\frac{2}{|z-1|}<1$. Fazendo $w=z-1$

$$\begin{aligned}\frac{z}{(z-1)(z+1)} &= \frac{w+1}{w(w+2)}=\Big(1+\frac{1}{w}\Big)\frac{1}{w(1+\frac{2}{w})}\\ &= \Big(\frac{1}{w}+\frac{1}{w^2}\Big)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n2^n}{w^n}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n2^n}{(z-1)^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n2^n}{(z-1)^{n+2}}\end{aligned}$$

(b) Atendendo a que a curva γ pertence à região de convergência da série determinada na alínea anterior, tem-se que

$$\oint_\gamma f(z)\,dz,=2\pi i a_{-1}=2\pi i(1+0)=2\pi i$$

(1.5 val.) 3) Determine o valor do integral

$$\oint_C\left(z^3\cos\frac{1}{z}+\frac{\text{sen}\,(\pi z)}{z^2(z-1)}\right)\,dz,$$

em que $C=\{z\in\mathbb{C}:|z|=\frac{1}{2}\}$, é percorrida uma vez em sentido directo.

Resolução:

Definindo-se

$$f_1(z)=z^3\cos\frac{1}{z}\quad \text{e}\quad f_2(z)=z^3\cos\frac{1}{z}$$

tem-se que

$$\oint_C\left(z^3\cos\frac{1}{z}+\frac{\text{sen}\,(\pi z)}{z^2(z-1)}\right)\,dz=\oint_C f_1(z)\,dz+\oint_C f_2(z)\,dz$$

A função f_1 é analítica em $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, e é fácil de verificar que $0\in\operatorname{int}\gamma$. Pelo desenvolvimento em série de Laurent em torno de $z_0=0$

$$f_1(z)=z^3\Big(1-\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{4!z^4}-\frac{1}{6!z^6}+...\Big)=z^3-\frac{z}{2}+\frac{1}{4!z}-\frac{1}{6!z^3}+...$$

conclui-se que a singularidade é essencial e Res $(f_1, 0) = \frac{1}{4!}$. Assim

$$\oint_C f_1(z)\,dz = \frac{\pi i}{12}$$

A função f_2 é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, e é fácil de verificar que $0 \in \operatorname{int}\gamma$ e que $1 \notin \operatorname{int}\gamma$. Dado que

$$\lim_{z\to 0} z f_2(z) = -\pi$$

conclui-se que a singularidade 0 é um polo simples e Res $(f_2, 0) = -\pi$. Assim

$$\oint_C f_1(z)\,dz = -2\pi^2 i$$

Finalmente

$$\oint_C \left(z^3 \cos\frac{1}{z} + \frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{z^2(z-1)} \right) dz = \frac{\pi i}{12} - 2\pi^2 i$$

(2 val.) 4) Calcule o integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+4}\,dx$$

através do teorema dos resíduos.

Resolução:

Considere-se a função complexa

$$F(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+4}$$

e para $R \in \mathbb{R}^+$ suficientemente grande, a curva

$$C_R = I_R \cup S_R = \{z = x \in]-R, R[\} \cup \{z = Re^{it}\,,\ t \in]0, \pi[\}$$

A função F é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{-2i, 2i\}$, e é fácil de verificar que $2i \in \operatorname{int} C_R$ e que $-2i \notin \operatorname{int} C_R$. Dado que

$$\lim_{z\to 2i}(z-2i)F(z) = \frac{e^{-2}}{4i}$$

conclui-se que a singularidade $2i$ é um polo simples e Res $(F, 2i) = \frac{e^{-2}}{4i}$. Assim, por aplicação do Teorema dos resíduos, tem-se que

$$\oint_{C_R} F(z)\,dz = \frac{e^{-2}\pi}{2}$$

Por outro lado

$$\frac{e^{-2}\pi}{2} = \oint_{C_R} F(z)\,dz = \int_{I_R} F(z)\,dz + \int_{S_R} F(z)\,dz = \int_{-R}^{R} F(x)\,dx + \int_{S_R} F(z)\,dz$$

Fazendo $R \to \infty$ obtem-se

$$\frac{e^{-2}\pi}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,dx + \lim_{R\to\infty} \int_{S_R} F(z)\,dz$$

Atendendo a que a função $\frac{1}{z^2+4}$ é analítica em $\{z : \operatorname{Im} z > 0\} \setminus \{2i\}$, e para $|z| = R \to \infty$

$$\left|\frac{1}{z^2+4}\right| \leq \frac{1}{R^2-4} \to 0$$

o Lema de Jordan permite concluir que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{S_R} F(z)\, dz = 0$$

Tem-se então que

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, dx = \frac{e^{-2}\pi}{2}$$

o que implica

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+4}\, dx = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, dx = \frac{e^{-2}\pi}{2}$$

(1 val.) 5) Seja f uma função inteira, isto é, analítica em $\mathbb{C}$, verificando $|f(z)| > \epsilon$, com $\epsilon > 0$. Mostre que f é constante.

Resolução:

Resolva à sua escolha uma e uma só das seguintes questões:

(1.5 val.) 6a) Esboçe o conjunto $T(A)$, sendo

(a) $A = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq \operatorname{Re} z \leq 2 \text{ e } 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 2\pi\}$ e $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $T(z) = e^z$.

(b) $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ e T a transformação definida por $T(z) = \frac{i}{z+1}$.

(1.5 val.) 6b) Determine a solução do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} + y\left(\frac{t}{t^2+1}\right) = \frac{\text{sen}\, 3t}{\sqrt{t^2+1}} \quad , \quad y(0) = 0,$$

indicando o intervalo máximo de existência da solução.