Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática IV

2º Semestre 2004/2005

2º Teste

Cursos: LCI, LEAmb, LEBL,LEBiom, LEGM, LEIC, LEM, LEMat, LEMG, LEQ, LQ

17 de Dezembro de 2005,

Duração do Teste: 1h30m
Justifique cuidadosamente todas as respostas.

(2 val.) **1.** Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$2xy + (4x^2 - y^2)\,\frac{dy}{dx} = 0, \quad y(0) = 1,$$

indicando o intervalo máximo de existência de solução.

Sugestão: Mostre que a equação admite um factor integrante da forma $\mu(y)$.

Resolução:

Sendo $M(x,y) = 2xy$ e $N(x,y) = 4x^2 - y^2$, tem-se que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x \quad , \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 8x$$

pelo que a equação não é exacta. Seguindo a sugestão, vamos admitir que a equação admite um factor integrante da forma $\mu(y)$. Sendo assim, a equação

$$\mu(y)2xy + \mu(y)(4x^2 - y^2)\,\frac{dy}{dx} = 0$$

é exacta, o que implica

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\mu(y)2xy\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\mu(y)(4x^2 - y^2)\Big)$$

ou seja, μ verifica a equação diferencial

$$\mu'(y) = \frac{3}{y}\mu(y)$$

Confirma-se então que existe um factor integrante da forma $\mu(y)$, e resolvendo a equação, conclui-se que $\mu(y) = y^3$. Consequentemente, a equação

$$2xy^4 + (4x^2y^3 - y^5)\,\frac{dy}{dx} = 0$$

é exacta, pelo que existe $\Phi(x,y)$, tal que $\nabla\Phi = (2xy^4, 4x^2y^3 - y^5)$ e $\Phi(x,y) = C$ define implicitamente a solução da equação diferencial. Para determinar Φ,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2xy^4 \quad \Rightarrow \quad \Phi(x,y) = x^2y^4 + C(y)$$

e

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 4x^2y^3 - y^5 \quad \Rightarrow \quad 4x^2y^3 + C'(y) = 4x^2y^3 - y^5 \quad \Rightarrow \quad C(y) = -\frac{y^6}{6} + c$$

pelo que

$$\Phi(x,y) = x^2y^4 - \frac{y^6}{6} + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

A solução geral da equação é definida implicitamente por

$$x^2y^4 - \frac{y^6}{6} = C \quad , \quad C \in \mathbb{R}$$

Pela condição inicial $y(0) = 1$, conclui-se que $C = -1/6$, e como tal a solução do PVI é definida por

$$6x^2y^4 - y^6 = -1 \tag{1}$$

É de notar, que atedendo a que $1^3\,N(0,1) = -1 \neq 0$, o teorema da função implícita garante a existência de uma única solução do PVI, $y(x)$ definida para x numa vizinhança de $x_0 = 0$. Essa solução poderá ser prolongada sempre que se verificar $y^3N(x,y) \neq 0$. Assim, o intervalo máximo de solução, I_{max}, será o maior intervalo tal que

- $x_0 = 0 \in I_{max}$;
- $y(x) \neq 0$ para todo $x \in I_{max}$;
- $y(x) \neq \pm 2x$ para todo $x \in I_{max}$.

Por um lado, fazendo $y = 0$ em (1), obtem-se uma equação impossível, pelo que $y(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por outro lado, fazendo $y = \pm 2x$ e substituindo na equação (1) obtem-se

$$96x^6 - 64x^6 = -1$$

que é tambem impossível em $\mathbb{R}$. Sendo assim $I_{max} = \mathbb{R}$.

(2 val.) **2.** Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule a matriz e^{At} e determine a solução do problema de valor inicial

$$X' = AX + B(t), \quad X(0) = (1,1).$$

em que $B(t) = (1, e^{2t})$.

Resolução:

Note-se que $A = 2I + N$, em que I é a matriz identidade, e

$$N = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim

$$e^{At} = e^{2t} I \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Nt)^n}{n!} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, e utilizando a fórmula da variação das constantes:

$$X(t) = e^{At} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{At} \int_0^t e^{-As} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{2s} \end{bmatrix} ds = \frac{e^{2t}}{2} \begin{bmatrix} 3 - e^{-2t} - 2t - t^2 \\ 2 + 2t \end{bmatrix}$$

(2 val.) **3.** Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = \delta(t-2), \quad y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

Resolução:

Aplicando transformada de Laplace a ambos os termos da equação, obtem-se

$$\mathcal{L}(\frac{d^2y}{dx^2} - y)(s) = \mathcal{L}(\delta(t-2))(s)$$

Pelas propriedades da transformada de laplace, e condições iniciais,

$$-1 + (s^2-1)\mathcal{L}(y)(s) = e^{-2s} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}(y)(s) = \frac{1}{s^2-1} + e^{-2s}\frac{1}{s^2-1}$$

Dado que

$$\frac{1}{s^2-1} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\Big) = \frac{1}{2}(\mathcal{L}(e^t)(s) - \mathcal{L}(e^{-t})(s)) = \mathcal{L}\left(\frac{1}{2}(e^t - e^{-t})\right)(s) = \mathcal{L}(\text{senh}\, t)(s)$$

tem-se que

$$e^{-2s}\frac{1}{s^2-1} = \mathcal{L}(H(t-2)\text{senh}\,(t-2))(s)$$

e como tal,

$$\mathcal{L}(y)(s) = \mathcal{L}(\text{senh}\, t + H(t-2)\text{senh}\,(t-2))(s)$$

pelo que a solução do pvi é

$$y(t) = \text{senh}\, t + H(t-2)\text{senh}\,(t-2)$$

(3 val.) **4.** Considere o seguinte problema de valores na fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial u}{\partial x}, & \text{para} \quad x \in]0,3[\ ,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(3,t) = 0, & \text{para} \quad t > 0, \\ u(x,0) = e^{-x} f(x), & \text{para} \quad x \in [0,3]. \end{cases} \tag{2}$$

em que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad 1 \le x \le 2, \\ 0 & \text{se } 0 \le x < 1 \text{ ou } 2 < x \le 3 \end{cases}$$

(a) Determine a série de senos da função f no intervalo $[0,3]$ e indique para que valores converge a série.

(b) Resolva o problema (2).

Resolução:

(a) A série de senos da função f é

$$SS(f)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}\,(\frac{n\pi x}{3})$$

em que

$$b_n = \frac{2}{3}\int_0^3 f(x)\text{sen}\,(\frac{n\pi x}{3})\,dx = \frac{2}{3}\int_1^2 \text{sen}\,(\frac{n\pi x}{3})\,dx = \frac{2}{n\pi}\left(\cos\,(\frac{n\pi}{3}) - \cos\,(\frac{2n\pi}{3})\right)$$

Conclui-se que

$$SS(f)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\left(\cos\,(\frac{n\pi}{3}) - \cos\,(\frac{2n\pi}{3})\right)\text{sen}\,(\frac{n\pi x}{3})$$

Pelo teorema da convergência pontual das séries de Fourier, tem-se que

$$SS(f)(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 1 \\ 1 & \text{se } 1 < x < 2 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 2 \\ 0 & \text{se } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

(b) Pelo método de separação de variáveis, se $u(x,t) = T(t)X(x)$, obtem-se

$$XT' = X''T + X'T \quad \Leftrightarrow \quad \frac{T'}{T} = \frac{X'' + 2X'}{X}$$

e para que a igualdade seja válida, para todos t e x nos intervalos indicados,

$$\frac{T'}{T} = \lambda \quad \text{e} \quad \frac{X'' + 2X'}{X} = \lambda \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Pelas condições de fronteira

$$u(0,t) = T(t)X(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(0) = 0 \quad , \quad u(3,t) = T(t)X(3) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(3) = 0$$

dado que a função T não pode ser a finção nula. Começemos por resolver o problema

$$\begin{cases} X'' + 2X' - \lambda X = 0 \\ X(0) = X(3) = 0 \end{cases}$$

A equação pode ser escrita na forma $(D^2 + 2D - \lambda)X = 0$, pelo que as suas soluções dependem das raízes da equação

$$R^2 + 2R - \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4\lambda}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad R = -1 \pm \sqrt{1 + \lambda}$$

Caso 1: $\lambda = -1$

Neste caso

$$X(x) = Ae^{-x} + Bxe^{-x}$$

e para que $X(0)=X(3)=0$ é necessário que $A=B=0$, pelo que a única solução a verificar o problema é

$$X(x)=0$$

para todo x.

Caso 2: $\lambda > -1$

Neste caso, e fazendo $1+\lambda=\mu^2$,

$$X(x)=Ae^{(-1+\mu)x}+Be^{(-1-\mu)x}$$

e para que $X(0)=X(3)=0$ é necessário que $A=B=0$, pelo que a única solução a verificar o problema é

$$X(x)=0$$

para todo x

Caso 3: $\lambda < -1$

Neste caso, e fazendo $1+\lambda=-\mu^2$,

$$X(x)=e^{-x}(A\text{sen}\,(\mu x)+B\cos(\mu x))$$

Para que $X(0)=0$ é necessário que $B=0$. Por outro lado para que $X(3)=0$, ou $A=0$ o que implicaria de novo $X(x)=0$, ou $\text{sen}\,(3\mu)=0$ implicando $\mu=\frac{n\pi}{3}$. Tem-se então que para $\lambda=-1-\frac{n^2\pi^2}{9}$ se obtem as soluções $X_n=e^{-x}\text{sen}\,(\frac{n\pi}{3}x)$, $n\in\mathbb{N}$. Por outro lado

$$\frac{T'}{T}=-1-\frac{n^2\pi^2}{9} \quad \Leftrightarrow \quad T_n(t)=e^{(-1-\frac{n^2\pi^2}{9})t}$$

Tem-se então, que para cada $n\in\mathbb{N}$,

$$u_n(x,t)=e^{(-1-\frac{n^2\pi^2}{9})t}e^{-x}\text{sen}\,(\frac{n\pi}{3}x)$$

é solução da equação diferencial mais as condições de fronteira, pelo que

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e^{(-1-\frac{n^2\pi^2}{9})t}e^{-x}\text{sen}\,(\frac{n\pi}{3}x)$$

é tambem (formalmente) solução. Finalmente, dado que $u(x,0)=e^{-x}f(x)$, tem-se que (usando o resultado de (a))

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e^{-x}\text{sen}\,(\frac{n\pi}{3}x)=e^{-x}f(x)=e^{-x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\left(\cos(\frac{n\pi}{3})-\cos(\frac{2n\pi}{3})\right)\text{sen}\,(\frac{n\pi x}{3})$$

pelo que

$$\alpha_n=\frac{2}{n\pi}\left(\cos(\frac{n\pi}{3})-\cos(\frac{2n\pi}{3})\right) \quad , \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

e como tal a solução de (2) é

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\left(\cos(\frac{n\pi}{3})-\cos(\frac{2n\pi}{3})\right)e^{(-1-\frac{n^2\pi^2}{9})t}e^{-x}\text{sen}\,(\frac{n\pi}{3}x)$$

(1 val.) **5.** Considere o problema de valor inicial

$$y' = y^2 - \cos(te^y) + 1, \quad y(0) = 1.$$

Mostre que o PVI admite solução única localmente, e que existe $\alpha \in]0,1[$, tal que

$$\lim_{t \to \alpha^-} y(t) = +\infty$$

Resolução:

Sendo $f(t,y) = y^2 - \cos(te^y) + 1$, é óbvio que f está definida para todo $(t,y) \in \mathbb{R}^2$ e é contínua em $\mathbb{R}^2$. Por outro lado, dado que a função

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + te^y \operatorname{sen}(te^y)$$

é também contínua em $\mathbb{R}^2$, f é localmente lipschtziana em $D = \mathbb{R}^2$. O Teorema de Picard garante assim existência e unicidade de solução do PVI, $y(t)$ para t pertencente a uma vizinhança de 0.

Para mostrar que a solçução explode para certo α, vamos usar comparação. Assim

$$f(t,y) \geq y^2 \quad , \quad \forall (t,y) \in \mathbb{R}^2 \tag{3}$$

considere-se o PVI

$$u' = u^2, \quad u(0) = 1.$$

que tem como solução $u(t) = \frac{1}{1-t}$ definida em $]-\infty, 1[$. Por (3),

$$y(t) \geq \frac{1}{1-t} \quad , \quad \forall t \geq 0$$

Visto a função $u(t) \to +\infty$ quando $t \to 1^-$, a função y terá tambem que convergir para $+\infty$ quando $t \to \alpha$ com $0 < \alpha \leq 1$.