Análise Matemática IV

1º Semestre 2006/2007

2º Teste

Cursos: LEEC e LEIC

16 de Dezembro de 2006, 13h

Duração do Teste: 1h30m

Justifique cuidadosamente todas as respostas.

(2 val.) **1.** Considere a seguinte equação diferencial:

$$y\cos t + (2y + \operatorname{sen} t)\frac{dy}{dt} = 0$$

Determine a solução da equação que verifica $y(\pi) = 1$ e justifique que essa é a única solução.

(2 val.) **2.** Considere a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(a) Determine a matriz e^{At}.

(b) Resolva o problema de valor inicial:

$$\dot{X} = AX + B(t) \quad , \quad X(0) = (1, 1, -1) \quad ,$$

em que $B(t) = (0, 1, e^{-2t})$.

(2 val.) **3.** Considere o problema de valor inicial:

$$y'' - 4y' = 2\delta(t-1) \quad , \quad y(0) = -y'(0) = 1 \quad ,$$

em que $\delta(t-1)$ é a distribuição delta de Dirac centrada em 1.

(a) Determine a Transformada de Laplace da solução do problema.

(b) Calcule a solução do problema.

(2 val.) **4.** Recorrendo ao método de separação de variáveis, determine a solução do problema de valores iniciais e de fronteira:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - (\operatorname{sen} t)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\quad , \quad t > 0 \\ u(t,0) = u\left(t, \frac{\pi}{2}\right) = 0, & t > 0 \\ u(0,x) = -\operatorname{sen}(2x) + 10\operatorname{sen}(6x), & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

(2 val.) **5.** Considere função $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \cos(\omega x) \quad , \quad \omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$$

Determine a série de Fourier de f em $[-\pi, \pi]$ e aproveite o resultado para mostrar que

$$\frac{1}{\omega} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\omega}{\omega^2 - n^2} = \pi \operatorname{cotg}(\pi\omega)$$