Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática IV

$2^{\underline{o}}$ Semestre 2005/2006

Teste de Recuperação (1º)

Cursos: LEGM, LEIC, LEM, LEMat e LEN

12 de Junho de 2006

Duração do Teste: 1h30m

Justifique cuidadosamente todas as respostas.

(2 val.) **1.** Considere a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por:

$$f(z) = f(x+iy) = y(x-3) + i(x^2+y^2).$$

(a) Indique o domínio de analiticidade de f.

(b) Definindo $u(x,y) =$Re $f(x+iy)$, mostre que u é harmónica em $\mathbb{R}^2$ e determine a sua harmónica conjugada, v, que verifica $v(0,0)=0$.

(2 val.) **2.** Calcule o valor dos integrais

$$\oint_{|z-i|=1} \frac{\text{sen}\, z}{z-i}\,dz \quad , \quad \oint_{|z-i|=1} \frac{2z}{(z-3)(z-i)^2}\,dz,$$

considerando a curva percorrida uma vez no sentido positivo.

(2,5 val.) **3.** Considere a função de variável complexa definida por

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}.$$

(a) Obtenha o desenvolvimento em série de Laurent de f em torno de $z_0 = 1$, válido numa vizinhança de z_0, indicando a região de convergência.

(b) **Utilize a alínea anterior** para determinar

$$\oint_{|z-1|=1} \frac{1}{(z-1)(z-3)}\,dz,$$

e

$$\oint_{|z-1|=1} \frac{g(z)}{(z-1)(z-3)}\,dz,$$

onde g é uma função analítica em $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| < 1\}$ verificando $g(1) = 1$ e a curva é percorrida uma vez no sentido directo.

(2 val.) **4.** Utilize o Teorema dos resíduos para determinar o valor

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+2}{x^4+2x^2+1}dx.$$

(1,5 val.) **5.** Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} + y^2\Big(\frac{1}{x} - x\Big) = 0 \quad , \quad y(1) = 2$$