Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática IV

2º Semestre 2005/2006

Teste de Recuperação (2º)

Cursos: LEGM, LEIC, LEM, LEMat e LEN

12 de Junho de 2006

Duração do Teste: 1h30m

Justifique cuidadosamente todas as respostas.

(2 val.) **1.** Considere o problema de valor inicial

$$y^2 + xy^3 + (5y^2 - xy + y^3 \operatorname{sen} y)\frac{dy}{dx} = 0 \quad , \quad y(0) = \pi \, .$$

Verifique que a equação admite um factor integrante da forma $\mu(y)$ e determine-o. Resolva o problema.

(2 val.) **2.** Determine a solução do problema de valor inicial

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{X} \quad , \quad \mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

(2 val.) **3.** Determine a solução geral da equação diferencial $y'' + y = \cos^2 x$.

(2,5 val.) **4.** Para cada α e $\beta \in \mathbb{R}$, considere o problema de valores na fronteira

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & x \in]0,1[\ , \ y \in]0,1[\\ u(0,y) = 0 \ , \ u(1,y) = \alpha\, f(y) \, , & y \in]0,1[\\ u(x,0) = 0 \ , \ u(x,1) = \beta\, f(x) \, , & x \in]0,1[\end{cases} \tag{1}$$

em que $f : [0,1] \to$ é definida por

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \frac{1}{4}[\cup]\frac{3}{4}, 1] \\ 4, & t \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] \end{cases}$$

(a) Determine a série de senos da função f no intervalo $[0,1]$ e indique para que valores converge a série em $[-1,1]$.

(b) Resolva o problema (**??**) para o caso $\alpha = 0$ e $\beta = 1$.

(c) Aproveite o resultado da alínea anterior para resolver o problema (**??**) no caso em que $\alpha = \beta = 1$

(1,5 val.) **5.** Considere o problema de valor inicoal

$$\frac{dy}{dt} = e^{y^2}(2 + \operatorname{sen}(ty))(y^2+1) \quad , \quad y(0) = 0$$

(a) Mostre que o problema admite solução única definida numa vizinhança de $t_0 = 0$.

(b) Mostre que a solução explode em $t = \alpha$, para certo $\alpha \in]1, \frac{\pi}{2}]$.

Sugestão: Verifique que a solução do PVI é uma função crescente para $t > 0$.