Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA IV

1º Teste do 1º semestre de 04/05

cursos:

LEAm, LEBl, LEQ, LQ, LEIC, LEM, LEMat, LEGM, LEAN e LEC

Data: 2004.10.30, 11h00
Duração: 1h30.

Justifique cuidadosamente todas as respostas.

(2,0 v) 1. Seja $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$v(x,y) = x^3 - 3xy^2.$$

Determine uma função $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ seja uma função analítica em todo plano complexo e calcule

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{z^2}\,dz$$

onde γ é a elipse $|z-1| + |z+1| = 3$ percorrida uma vez no sentido positivo.

Resolução:

Como $v(x,y) = x^3 - 3xy^2$, atendendo às condições de Cauchy-Riemann, a função u deve verificar:

$$u_x = v_y = -6xy,$$

e integrando na variável x, temos que:

$$u(x,y) = -3x^2y + g(y).$$

Como $u_y = -v_x$, $-v_x = -(3x^2 - 3y^2)$ e $u_y = -3x^2 + g'(y)$, temos que $g'(y) = 3y^2$. Logo, $g(y) = y^3 + C$. Escolhendo $C = 0$, ficamos então com:

$$u(x,y) = -3x^2y + y^3.$$

Notando agora que $f(z) = f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y) = -3x^2y+y^3+i\,(x^3 - 3xy^2) = i\,((x^3 - 3xy^2) + i\,(3x^2y - y^3)) = iz^3$, temos que $\dfrac{f(z)}{z^2} = iz$, pelo que,

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{z^2}\,dz = 0,$$

pelo Teorema de Cauchy.

Nota: Ou então, pela fórmula integral de Cauchy, verificando que o ponto $z = 0$ está na região delimitada pela curva γ, porque $|-1| + |1| = 2 < 3$,

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{z^2}\,dz = 2\pi i f'(0) = 2\pi i \left(\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(0,0)\right) = 0.$$

(2,0 v) 2. Seja $f(z) = \dfrac{e^z + e^{\frac{1}{z}}}{z^2}$. Estude a singularidade de f e calcule o resíduo correspondente. Calcule $\displaystyle\oint_{|z|=1} f(z)\, dz$ considerando a circunferência percorrida uma vez no sentido directo.

Resolução:

A função

$$f(z) = \frac{e^z + e^{\frac{1}{z}}}{z^2}$$

tem uma singularidade isolada em $z = 0$. Atendendo ao desenvolvimento em série de Maclaurin da exponencial, obtemos, para $z \neq 0$:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z^2}\{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n n!}\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-2}}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+2} n!} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^{n-2}}{n!} + z^{-1} + z^{-2} + z^{-2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^{n+2} n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+2)!} + z^{-1} + 2z^{-2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} z^{-n}
\end{aligned}$$

Concluímos portanto que $z = 0$ é uma singularidade essencial de f.

O resíduo correspondente será dado pelo coeficiente que multiplica a potência z^{-1} na série de Laurent que acabámos de obter. Isto é,

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = 1.$$

Atendendo ao teorema dos resíduos, o integral pedido é igual a $2\pi i$.

(2,0 v) 3. Calcule

$$\oint_{|z|=3} \frac{3z+2}{(z-1)^2(2z+5)}\, dz.$$

considerando a circunferência percorrida uma vez no sentido directo.

Resolução:

A função

$$f(z) \equiv \frac{3z+2}{(z-1)^2(2z+5)},$$

tem um pólo singularidades isoladas em $z=1$ e $z=-\frac{5}{2}$, e é fácil ver que em $z=1$ temos um pólo duplo e em $z=-\frac{5}{2}$ um pólo simples. De facto qualquer dos limites $\lim_{z\to-\frac{5}{2}}(z+\frac{5}{2})f(z)$ e $\lim_{z\to 1}(z-1)^2 f(z)$ existe em $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Como as duas singularidades pertencem à região delimitada pela circunferência de raio 3, o integral pedido é igual a $2\pi i(\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=-\frac{5}{2}} f(z))$.

Cálculo dos resíduos:

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=-\frac{5}{2}} f(z) &= \lim_{z\to-\frac{5}{2}} (z+\frac{5}{2})f(z) \\
&= \lim_{z\to-\frac{5}{2}} \frac{(3z+2)}{2(z-1)^2} \\
&= \frac{(-\frac{15}{2}+2)}{2(\frac{5}{2}+1)^2} \\
&= -\frac{11}{49}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) &= \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}\left((z-1)^2 f(z)\right) \\
&= \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}\left(\frac{3z+2}{2z+5}\right) \\
&= \lim_{z\to 1}\left(\frac{3(2z+5)-2(3z+2)}{(2z+5)^2}\right) \\
&= \lim_{z\to 1} \frac{11}{(2z+5)^2} \\
&= \frac{11}{49}
\end{aligned}$$

Portanto, o integral em questão é igual a $2\pi i.\left(\frac{11}{49}-\frac{11}{49}\right)=0.$

(2,0 v) 4. Utilizando o Teorema dos Resíduos, mostre que

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\operatorname{sen} x}\, dx = \frac{2}{3}\pi\sqrt{3}.$$

Resolução:

Utilizando a parametrização $z = e^{i\theta}$, obtemos:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\sin\theta}\, d\theta = \oint_{|z|=1} \frac{1}{(2+\frac{z-z^{-1}}{2i})}.\frac{1}{iz}\, dz = \oint_{|z|=1} \frac{2}{z^2+4zi-1}\, dz = \oint_{|z|=1} f\, dz,$$

onde $f(z) = \dfrac{2}{z^2+4zi-1}$.

Como $z^2+4zi-1 = (z+2i)^2+3 = (z-i(-2+\sqrt{3}))(z-i(-2-\sqrt{3}))$, temos pelo Teorema dos Resíduos

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\sin\theta}\, d\theta = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i(-2+\sqrt{3})} f(z),$$

uma vez que $\left|i(-2+\sqrt{3})\right| = 2-\sqrt{3} < 1$ e $\left|i(-2-\sqrt{3})\right| > 1$; e portanto apenas a singularidade $z = i(-2+\sqrt{3})$ se encontra no círculo de centro na origem e raio um. Como esta singularidade é um pólo simples para f, temos que:

$$\operatorname*{Res}_{z=i(-2+\sqrt{3})} f(z) = \lim_{z\to i(-2+\sqrt{3})} \frac{2}{(z-i(-2-\sqrt{3}))} = \frac{1}{i\sqrt{3}},$$

donde

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\operatorname{sen}\theta}\, d\theta = 2\pi i.\frac{1}{i\sqrt{3}} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}.$$

(2,0 v) 5. Seja $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_m z^m$, uma função polinomial, com $a_0 \neq 0$ e $m \geqslant 1$. Para um inteiro n tal que $0 < n \leqslant m$, considere a função

$$g(z) = \frac{P(z)}{z^n}.$$

Justifique que g tem um pólo de ordem n em $z = 0$ e calcule o respectivo resíduo.

Resolução:

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{P(z)}{z^n} \\ &= a_0 z^{-n} + a_1 z^{1-n} + \ldots + a_m z^{m-n} \\ &= \sum_{k=-n}^{m-n} a_{n+k} z^k \end{aligned}$$

Uma vez que $n > 0$ e $a_0 \neq 0$, por definição, g tem um pólo de ordem n em $z = 0$. Notando que $m - n \geqslant 0$, o resíduo desta função é dado por pelo coeficiente que multiplica a potência z^{-1}, ou seja

$$\operatorname*{Res}_{z=0} g(z) = a_{n-1}.$$