Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA IV

2º Teste do 1º semestre de 04/05

cursos:

LEAm, LEBl, LEQ, LQ, LEIC, LEM, LEMat, LEGM, LEAN e LEC

Data: 2004.12.18, 11h00 **Duração:** 1h30.

Justifique cuidadosamente todas as respostas.

(2,0 v) 1. Considere a equação:

$$y^2(\frac{1}{x}+\log x)+2y\log x\frac{dy}{dx}=0.$$

Verifique que a equação tem um factor integrante da forma $\mu=\mu(x)$ e determine-o. Obtenha explicitamente a solução da equação que verifica a condição inicial $y(e)=-1$, e determine o seu intervalo máximo de definição.

Resolução:

Vamos determinar $\mu(x)$ por forma que:

$$\mu(x)(\frac{1}{x}+\log x)y^2+2y\mu(x)\log(x)\frac{dy}{dx}=0,$$

seja exacta. Para tal, deveremos ter:

$$\frac{d}{dy}(\mu(x)(\frac{1}{x}+\log x)y^2)=\frac{d}{dx}(2y\mu(x)\log(x)),$$

ou seja

$$2y\mu(x)\log x=2y\mu'(x)\log(x).$$

Um factor integrante da forma $\mu=\mu(x)$ deverá portanto satisfazer $\mu(x)=\mu'(x)$, donde podemos tomar $\mu(x)=e^x$. Então, a equação

$$e^x(\frac{1}{x}+\log x)y^2+2ye^x\log(x)\frac{dy}{dx}=0,$$

é exacta, e portanto existe $F(x,y)$ tal que esta equação se pode escrever como

$$\frac{d}{dx}F(x,y(x))=0.$$

Determinação de F:

Deveremos ter:

$$\frac{\partial}{dy}F(x,y(x))=2ye^x\log x,$$

donde, integrando na variável y, se obtém:

$$F(x,y(x))=y^2e^x\log x+h(x),$$

para alguma função $h(x)$. Por outro lado, como

$$\frac{\partial}{dx}F(x,y(x))=y^2e^x(\frac{1}{x}+\log x)+h'(x)=y^2e^x(\frac{1}{x}+\log x),$$

podemos tomar $h = 0$, e a solução geral da equação é dada implicitamente por:

$$y^2 e^x \log x = C \qquad (C \in \mathbb{R}).$$

A condição inicial $y(e) = -1$ determina $C = e^e$, e, como $e^x \log x \neq 0$ para x numa vizinhança de $x = e$, podemos dividir e obter explicitamente:

$$y(x) = -\sqrt{\frac{e^{e-x}}{\log x}}.$$

Esta expressão define uma função de classe C^1 no seu domínio que é $]1, +\infty[$. De acordo com esta expressão temos $\lim_{x \to 1} y(x) = -\infty$ e portanto o intervalo $]1, +\infty[$ é o intervalo máximo de definição.

(2,0 v) 2. Considere a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcule a exponencial $e^{t\mathbf{A}}$ e aproveite o resultado para resolver o problema de valor inicial

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}\ , \quad \text{com} \quad \mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}^T.$$

Resolução:

A matriz A é forma da pelos blocos:

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O polinómio característico de $\mathbf{B}_1$ é $(3 - \lambda)^2 - 4$, que tem as raizes 1 e 5. Para o valor próprio 1 temos os vectores próprios que $\mathbf{v}$ que satisfazem a

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{v} = 0$$

Portanto $\mathbf{v} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Para o valor próprio 5 temos os vectores próprios que $\mathbf{v}$ que satisfazem a

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{v} = 0.$$

Portanto $\mathbf{v} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Pelo que

$$\begin{aligned}
\exp t\mathbf{B}_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \exp\left(t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^t & e^{5t} \\ -e^t & e^{5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{e^{5t}+e^t}{2} & \frac{e^{5t}-e^t}{2} \\ \frac{e^{5t}-e^t}{2} & \frac{e^{5t}+e^t}{2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Por outro lado

$$(\mathbf{B}_2)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Donde

$$\exp t\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então

$$e^{t\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \frac{e^{5t}+e^{t}}{2} & \frac{e^{5t}-e^{t}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{e^{5t}-e^{t}}{2} & \frac{e^{5t}+e^{t}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A solução do problema de valor inicial proposto é então dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{(t-1)\mathbf{A}} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e^{5(t-1)}+e^{(t-1)}}{2} & \frac{e^{5(t-1)}-e^{(t-1)}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{e^{5(t-1)}-e^{(t-1)}}{2} & \frac{e^{5(t-1)}+e^{(t-1)}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2(t-1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{5(t-1)} + e^{(t-1)} \\ e^{5(t-1)} - e^{(t-1)} \\ -7+10t \\ 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(2,0 v) 3. Resolva o seguinte problema com valores iniciais

$$y'' - y = te^t \quad \text{com} \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Resolução:

A equação homogénea correspondente pode escrever-se como

$$(D^2 - I)y = 0.$$

Por outro lado, $h(t) = te^t$, é solução de:

$$(D - I)^2 h = 0.$$

Portanto, a solução geral da equação deverá satisfazer:

$$(D - I)^3 (D + I) y = 0,$$

isto é, deverá ser da forma:

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^t + \alpha t e^t + \beta t^2 e^t.$$

Como $y = y_h + y_p$, onde $y_h = c_1 e^{-t} + c_2 e^t$ é a solução geral da equação homogénea correspondente, a solução particular y_p deve satisfazer:

$$(D^2 - I) y_p = (D^2 - 1)(\alpha t e^t + \beta t^2 e^t) = te^t.$$

Como

$$\begin{aligned} (\alpha t e^t + \beta t^2 e^t)'' - \left(\alpha t e^t + \beta t^2 e^t\right) &= \left(\alpha (t+1) e^t + \beta \left(2t + t^2\right) e^t\right)' - \alpha t e^t - \beta t^2 e^t \\ &= \alpha (t+2) e^t + \beta \left(2 + 4t + t^2\right) e^t - \alpha t e^t - \beta t^2 e^t \\ &= 2(\alpha + \beta) e^t + 4\beta t e^t, \end{aligned}$$

temos portanto:

$$2(\alpha+\beta)e^t = 0,\ 4\beta t e^t = t e^t,$$

ou seja, concluímos que a solução geral da equação não homogénea é:

$$y = c_1 e^{-t} + c_2 e^t - \frac{1}{4} t e^t + \frac{1}{4} t^2 e^t.$$

Vejamos se as condições iniciais $y(0) = y'(0) = 0$, determinam agora as constantes c_1 e c_2. Verifica-se facilmente que a condição $y(0) = 0$ implica que $c_1 = -c_2$. Calculando a derivada de y

$$y' = -c_1 e^{-t} + c_2 e^t - \frac{1}{4}(t+1)e^t + \frac{1}{4}\left(2t+t^2\right)e^t,$$

a condição $y'(0) = 0$ determina a mesma relação, $-c_1 + c_2 = \frac{1}{4}$. Concluímos então que as soluções do p.v.i são:

$$y = \frac{e^t - e^{-t}}{8} - \frac{1}{4} t e^t + \frac{1}{4} t^2 e^t.\ c \in \mathbb{R}.$$

(2,0 v) 4. Utilizando o método da separação de variáveis, determine uma solução da equação

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = 3u,$$

que satisfaz as condições fronteira $u(t,0) = u(t,\pi) = 0$ e a condição inicial

$$u(0,x) = x(\pi - x) \quad \text{para } x \in [0,\pi].$$

Resolução:

Procurando soluções separadas de $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = 3u$, com $u(t,0) = u(t,\pi) = 0$, temos para $u(t,x) = T(t)X(x)$,

$$T'(t)X''(x) = 3T(t)X(x), \quad \text{com} \quad X(0) = X(\pi) = 0.$$

Então

$$X''(x) = \sigma\, X(x), \quad \text{com} \quad X(0) = X(\pi) = 0$$

e

$$T'(t) = \frac{3}{\sigma}\, T(t)$$

onde σ é uma constante real.

O problema em X só tem soluções não triviais se $\sigma = -n^2$ para algum $n \in \mathbb{Z}^+$. De facto se $\sigma = 0$ vem $X(x) = a + bx$, e as condições fronteira impõem $a = b = 0$. Se pelo contrário $\sigma \neq 0$, então as soluções de $X'' - \sigma X = 0$ são $X(x) = ae^{\sqrt{\sigma}x} + be^{-\sqrt{\sigma}x}$; portanto as condições fronteira impõem $a = -b$ e (para $a \neq 0$) $e^{2\sqrt{\sigma}\pi} = 1$, ou seja $\sqrt{\sigma} = in$ e $\sigma = -n^2$.

Para $\sigma = -n^2$. Por um lado temos $X(x) = K \operatorname{sen}(nx)$, onde K é uma constante arbitrária, e por outro lado

$$T'(t) + \frac{3}{n^2} T(t) = 0.$$

Pelo que, a menos de uma constante multiplicativa, vem

$$T(t) = e^{-\frac{3}{n^2}t}.$$

Encontramos então as seguintes soluções para cada $n \in \mathbb{Z}^+$

$$X(x)\,T(t) = Ke^{-\frac{3}{n^2}t}\,\mathrm{sen}\,(nx)\,.$$

Fazendo combinações lineares destas soluções separadas, obtemos a seguinte solução formal, aonde β_n são constantes,

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e^{-\frac{3}{n^2}t}\,\mathrm{sen}\,(nx)\,.$$

Usando agora a condição inicial obtemos

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n\,\mathrm{sen}\,(nx) = x(\pi - x) \quad \text{para } x \in [0,\pi]\,..$$

Calculando os coeficientes desta série de senos obtemos:

$$\begin{aligned}
\beta_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi-x)\,\mathrm{sen}\,(nx)\;dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{-x(\pi-x)\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{-(\pi-2x)\cos(nx)}{n}\;dx\right) \\
&= \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}(\pi-2x)\cos(nx)\;dx \\
&= \frac{2}{\pi n}\left(\left[\frac{(\pi-2x)\,\mathrm{sen}\,(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{-2\,\mathrm{sen}\,(nx)}{n}\;dx\right) \\
&= \frac{4}{\pi n^2}\int_0^{\pi}\mathrm{sen}\,(nx)\;dx \\
&= \frac{4}{\pi n^3}(1-\cos(n\pi))
\end{aligned}$$

Portanto a solução do problema é

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(1-(-1)^n)}{\pi n^3}e^{-\frac{3}{n^2}t}\,\mathrm{sen}\,(nx)\,.$$

(2,0 v) 5. Seja $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $g(0,0) = 0$ e $|g(t,y)| \leqslant y^2$ para todo o $(t,y) \in \mathbb{R}^2$. Para $a \in [0,2]$, considere o problema de valor inicial:

$$y' = -2y + g(t,y) \quad \text{e} \quad y(0) = a.$$

Prove que se $a \in]0,2[$, então a solução $y(t)$ do problema é estritamente decrescente para $t \geqslant 0$ e determine $\lim_{t\to+\infty} y(t)$.

Resolução:

Considere-se a função definida em $\mathbb{R}^2$ por:

$$f(t,y) = -2y + g(t,y)$$

Note-se que $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e para todo o $(t,y) \in \mathbb{R}^2$

$$f(t,y) \leqslant -2y + y^2 = y(y-2) \tag{1}$$

pelo que, se $y(t) \in]0,2[$, então $y'(t) < 0$, ou seja $y(t)$ é estritamente decrescente.

Consideremos o problema

$$u' = u(u-2) \quad \text{com} \quad u(0) = 2,$$

que tem como (única) solução é $u \equiv 2$. Pelo teorema de comparação, $y(t) < u(t) = 2$, para $t \geqslant 0$. Por outro lado, $y \equiv 0$ é solução da equação diferencial. (note-se que $|g(t,0)| \leqslant 0$ implica $f(t,0) = 0$). Mas a existência de duas soluções distintas da equação diferencial tais que $y(\bar{t}) = 0$, para certo $\bar{t} > 0$ contradiz o teorema de Picard. Assim, a solução do problema não se anula para $t \geqslant 0$. Concluímos portanto que $y(t) \in]0,2[$ para $t \geqslant 0$, o que implica que $y(t)$ é estritamente decrescente em $[0,+\infty[$

Seja:

$$L = \lim_{t \to +\infty} u(t).$$

Como $y'(t) \to 0$ quando $t \to \infty$, da desigualdade (1) resulta que $0 \leqslant L(L-2)$, e de $L \in [0,2[$ concluímos que $L = 0$.