Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática IV

2º Semestre 2000/2001

2º Teste e 1º Exame - Licenciaturas em Engenharia Informática e de Computadores e Engenharia Civil

25 de Junho de 2001

Exame: responda a todas as questões.
Duração do exame: 3 horas
Teste: responda apenas às questões 5 a 8.
Duração do teste: 1 hora e 30 minutos
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ e considere a função

$$u(x,y) = x^3\lambda^3 - 3xy^2\lambda.$$

(1 val.) a) Determine para que valores de λ a função u é harmónica.

Resolução:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lambda^3 3x^2 - \lambda 3y^2 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\lambda 6xy$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \lambda^3 6x \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\lambda 6x$$

u é harmónica se e só se $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ para todo x, y. Logo

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \lambda^3 6x - \lambda 6x \\ &= (\lambda^3 - \lambda)6x = \lambda(\lambda^2 - 1)6x \end{aligned}$$

Segue-se que $\lambda = 0, 1$ ou -1.

(1 val.) b) Seja $\lambda = 1$. Determine uma função analítica f tal que $f(1) = 1$ e a parte real de f é u.

Resolução: Sendo $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$ há que determinar uma sua harmónica conjugada $v = \operatorname{Im} f$. Pelas equações de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2$$

Integrando em y

$$v(x,y) = 3x^2y - y^3 + h(x)$$

Por outro lado

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad 6xy + h'(x) = 6xy$$

o que implica $h'(x) = 0$. Logo $v(x,y) = 3x^2y - y^3 + C$ e

$$f(x+iy) = x^3 - 3xy^2 + i\big(3x^2y - y^3 + C\big)$$

Aplicando a condição $f(1) = 1$, obtém-se

$$f(x+iy) = x^3 - 3xy^2 + i\big(3x^2y - y^3\big).$$

(1 val.) c) Calcule o integral

$$\oint_C \frac{f(z)}{z^4}\,dz$$

onde C é a circunferência de centro na origem e raio 1 percorrida uma vez no sentido directo.

Resolução: Usando a fórmula integral de Cauchy

$$\oint_C \frac{f(z)}{z^4}dz = \frac{2\pi i}{3!} f^{(3)}(0).$$

Como $f(z) = z^3$, segue-se que

$$\oint_C \frac{f(z)}{z^4}dz = 2\pi i.$$

2. Seja

$$f(z) = \frac{1-\cos z}{z^2} + \frac{1}{2-z}.$$

(1 val.) a) Desenvolva a função $f(z)$ em série de Laurent na região $|z| < 2$.

Resolução: Como

$$1 - \cos z = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \dots$$

tem-se que

$$\frac{1-\cos z}{z^2} = \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+2)!}$$

Por outro lado

$$\frac{1}{2-z} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{z}{2})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$$

sendo o desenvolvimento em série válido para $|z| < 2$. Segue-se que a a série de Laurent de f em $|z| < 2$ é dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+2)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$$

ou seja

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{\cos(\frac{n\pi}{2})}{(n+2)!} + \frac{1}{2^{n+1}} \Big) z^n$$

(1 val.) b) Indique e classifique as singularidades da função $f(z)$.

Resolução: A função f tem singularidades nos ponto $z=0$ e $z=2$. Analisando a série obtida em a), pode-se concluir que a singularidade na origem é removível. Por outro lado

$$\lim_{z\to 2}(z-2)f(z) = -1$$

pelo que a singularidade no ponto $z=2$ é um pólo simples.

(1 val.) c) Calcule

$$\oint_C f(z)\,dz,$$

onde C é a circunferência de centro em $z=1+i$ e raio 3, percorrida uma vez no sentido directo.

Resolução: Aplicando o teorema de resíduos, obtém-se

$$\oint_C f(z)\;dz = 2\pi i\cdot \mathrm{Res}_{z=2} f(z) = -2\pi i.$$

(2 val.) **3.** Calcule o seguinte integral utilizando o teorema dos resíduos:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\theta)}{4\,\mathrm{sen}\,\theta - 5}\,d\theta$$

(**Sugestão:** $\cos(2\theta) = \mathrm{Re}\, e^{i2\theta}$).

Resolução: Atendendo a que

$$\cos 2\theta = \frac{e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}}{2} \qquad\qquad \mathrm{sen}\,\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

com $z=e^{i\theta}$, obtém-se

$$\cos 2\theta = \frac{z^2+z^2}{2} \quad , \quad \mathrm{sen}\,\theta = \frac{z-z^{-1}}{2i} \quad \text{e} \quad \frac{dz}{iz} = d\theta$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\theta)}{4\,\mathrm{sen}\,\theta-5}\,d\theta &= \int_C \frac{\frac{z^2+z^{-2}}{2}}{4\frac{z-z^{-1}}{2i}-5}\,\frac{dz}{iz} \\
&= \int_C \frac{\frac{z^2+z^{-2}}{2}}{2(z^2-1)-i5z}\,dz \\
&= \int_C \frac{z^4+1}{4z^2(z-2i)(z-\frac{i}{2})}\,dz \\
&= 2\pi i\cdot\left(\mathrm{Res}_{z=0}\,\phi(z) + \mathrm{Res}_{z=\frac{i}{2}}\,\phi(z)\right) \qquad\qquad \phi(z) = \frac{z^4+1}{4z^2(z-2i)(z-\frac{i}{2})} \\
&= 2\pi i\Big(\frac{d}{dz}\frac{z^4+1}{4z^2(z-2i)(z-\frac{i}{2})}\Big|_{z=0} + \frac{z^4+1}{4z^2(z-2i)}\Big|_{z=\frac{i}{2}}\Big) \\
&= 2\pi i\big(i\frac{5}{8} - i\frac{17}{24}\big) \\
&= 2\pi i\big(-i\frac{1}{12}\big) \\
&= \frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

(2 val.) **4.** Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\text{sen}(2t)}{1-y} \\ \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Explicite a solução e determine o seu intervalo máximo de definição.

Resolução: Trata-se de uma equação separável, pelo que

$$\dot{y} = \frac{\text{sen}\,2t}{1-y} \quad \Rightarrow \quad (1-y)\dot{y} = \text{sen}\,2t$$

Integrando em t

$$y - \frac{y^2}{2} = -\frac{\cos 2t}{2} + C.$$

Aplicando a condição inicial, obtém-se

$$0 = -\frac{1}{2} + C.$$

Logo

$$y - \frac{y^2}{2} = \frac{1-\cos 2t}{2}.$$

Como

$$y = -1 \pm \sqrt{\cos 2t}$$

e $y(0) = 0$, segue-se que

$$y(t) = 1 - \sqrt{\cos 2t} \quad , \quad t \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$$

é a solução.

Nota: Para $t \to \pm\frac{\pi}{4}$, $y(t) \to 1$ e $f(t,y) = \frac{\text{sen}(2t)}{y-1} \to \infty$, pelo que $\pm\frac{\pi}{4}$ não pertencem ao domínio de definição da solução.

Início do teste

As cotações indicadas são para o exame;

para obter as cotações do teste, multiplique-as por 2.

(2 val.) **5.** Determine a solução $y(t)$ do seguinte problema de valor inicial, indicando também o intervalo máximo de definição:

$$\begin{cases} t+y^2-2ty\,\dot{y}=0 \\ y(1)=1 \end{cases}$$

Resolução: Verifica-se que a equação não é linear nem separável. Para $M(t,y) = t+y^2$ e $N(t,y) = -2ty$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y \quad \text{e} \quad \frac{\partial N}{\partial t} = -2y$$

pelo que a equação não é exacta. Visto

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial t}}{N} = \frac{2y+2y}{-2ty} = -\frac{2}{t} = \frac{d}{dt}\big(-2\log t\big)$$

conclui-se que a função $\mu(t) = \frac{1}{t^2}$ é um factor de integração, e consequentemente

$$\frac{t+y^2}{t^2} - 2\frac{ty}{t^2}\dot{y} = 0$$

é uma equação exacta. Portanto existe uma função ϕ tal que

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{t+y^2}{t^2} = \frac{1}{t} + \big(\frac{y}{t}\big)^2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -2\frac{ty}{t^2} = -2\frac{y}{t}.$$

Integrando a primeira igualdade em t, obtem-se

$$\phi(t,y) = \log|t| - \frac{y^2}{t} + h(y)$$

Por outro lado

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -2\frac{y}{t} \quad \Rightarrow \quad -2\frac{y}{t} + h'(y)$$

o que implica $h'(y) = 0$. Logo $\log|t| - \frac{y^2}{t} = C$ determina uma solução implícita da equação diferencial. Aplicando a condição inicial $y(1) = 1$, obtém-se

$$\frac{y^2}{t} = \log|t| + 1$$

Para determinar o intervalo máximo de solução, explicita-se a solução (ou verificam-se as condições do Teorema da função implícita). Como tal

$$y = \pm\sqrt{t\log|t| + t}$$

Como $y(1) = 1$ tem-se finalmente que

$$y = \sqrt{t\log|t| + t}$$

pelo que o intervalo máximo é $\{t : t > e^{-1}\}$.

6. Considere a seguinte matriz:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(1 val.) a) Calcule $e^{\mathrm{A}t}$.

Resolução:

$$e^{\mathrm{A}t} = \begin{bmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$$

(2 val.) b) Determine a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{\mathrm{y}} = \mathrm{Ay} + \mathrm{h(t)} \\ \\ \mathrm{y}(1) = (1,1,1)^T \end{cases}$$

onde $\mathrm{h(t)} = (0, 2e^t, e^t)^T$.

Resolução: A solução geral da equação homogénea é dada por $\dot{\mathrm{y}} - \mathrm{Ay} = 0$

$$\mathrm{y}(t) = e^{\mathrm{A}t} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}.$$

Para determinar uma solução particular da equação basta determinar soluções particulares das equações

$$\dot{y}_2 - y_2 = 2e^t$$
$$\dot{y}_3 - y_3 = e^t.$$

Segue-se que

$$y_2(t) = Ate^t \quad \text{e} \quad y_3(t) = Bte^t.$$

Para determinar A e B tem-se

$$\dot{y}_2 - y_2 = 2e^t \quad \Rightarrow \quad Ae^t + Ate^t - Ate^t = 2e^t \quad \Rightarrow \quad A = 2$$

e

$$\dot{y}_3 - y_3 = e^t \quad \Rightarrow \quad Be^t + Bte^t - Bte^t = e^t \quad \Rightarrow \quad B = 1$$

Logo uma solução particular é

$$\mathrm{y}_P(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2te^t \\ te^t \end{bmatrix}.$$

Aplicando a condição inicial, obtém-se

$$\mathrm{y}(t) = e^{\mathrm{A}(t-1)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1-2e \\ 1-e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2te^t \\ te^t \end{bmatrix}.$$

Nota: O problema tambem pode ser resolvido usando a fórmula da variação das constantes.

7. Pretende-se resolver o problema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 1 \\ u(t,0) = 0 \\ u(t,\pi) = 0 \\ u(0,x) = -\frac{x^2}{2} \end{cases}$$

($t \geq 0$ e $x \in [0,\pi]$).

(1 val.) a) Calcule a expressão da série de Fourier <u>de senos</u> da função $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$.

Resolução: Os coeficientes da série de senos são dados por

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x \cdot \operatorname{sen} nx \; dx$$

Primitivando por partes, obtem-se

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\Big[-\frac{x \cdot \cos nx}{n}\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos nx \; dx\Big] \\ &= \frac{2}{\pi}\Big[-\frac{\pi \cdot \cos n\pi}{n}\Big] = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}. \end{aligned}$$

A série de Fourier é

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\operatorname{sen} nx = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\operatorname{sen} nx}{n}.$$

(1 val.) b) Determine uma solução particular da equação diferencial da forma $u(t,x) = g(x)$ que satisfaça também as condições de fronteira.

Resolução: Uma solução estacionária da equação, verifica a equação diferencial

$$-\frac{d^2 g}{dx^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad g' = -x + A \quad \Rightarrow \quad g(x) = -\frac{x^2}{2} + Ax + B$$

Como $g(0) = 0$, segue-se que $B = 0$, e $g(\pi) = 0$ implica $A = \pi/2$. Logo

$$g(x) = \frac{\pi}{2}x - \frac{x^2}{2}.$$

(1 val.) c) Resolva o problema.

Resolução: Considera-se uma solução na forma

$$u(t,x) = v(x,t) + g(x)$$

em que g é a função determinada em b), e $v(x,t)$ é uma solução não trivial do problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \\ v(t,0) = 0 \\ v(t,\pi) = 0 \end{cases}$$

Para determinar $v(x,t)$ usa-se separação de variáveis, isto é, considera-se $v(x,t) = T(t) \cdot X(x)$. Tem-se

$$T' \cdot X - X'' \cdot T = 0$$

e utilizando as condições de fronteira

$$v(t,0) = 0 \quad \Rightarrow \quad T(t) \cdot X(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(0) = 0$$

e

$$v(t,\pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad T(t) \cdot X(\pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(\pi) = 0$$

Segue-se que

$$T' \cdot X - T \cdot X'' = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = \sigma$$

ou seja há que resolver

$$T' - \sigma T = 0$$

e

$$\begin{aligned} &X'' - \sigma X = 0 \\ &X(0) = 0 \quad , \quad X(\pi) = 0 \end{aligned}$$

Obtém-se

$$X(x) = A \cos \sqrt{-\sigma} x + B \operatorname{sen} \sqrt{-\sigma} x$$

e aplicando as condições de fronteira, segue-se

$$A = 0 \quad , \quad \sigma = -n^2 \quad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

e

$$T(t) = e^{-n^2 t}$$

Tem-se então que

$$u(x,t) = v(t,x) + g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-n^2 t} \Big(\operatorname{sen}(nx) \Big) + \frac{\pi}{2} x - \frac{x^2}{2}$$

Para determinar os coeficientes B_n, usa-se a condição inicial $u(0,x) = -\frac{x^2}{2}$. Logo

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}(nx) = -\frac{\pi}{2} x$$

Usando a série de Fourier determinada em 7 a) conclui-se

$$B_n = (-1)^n \frac{\pi}{n}$$

e como tal a solução do problema é

$$u(t,x) = \frac{\pi}{2} x - \frac{x^2}{2} + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2 t} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}.$$

8. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável. Considere o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = (1+y^2)f(ty) \\ \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

(0.5 val.) a) Mostre que este problema tem uma solução única numa vizinhança de 0.

Resolução: Como a função $(1+y^2)f(ty)$ é contínua e a função

$$\frac{\partial}{\partial y}\big((1+y^2)f(ty)\big) = 2yf(ty) + (1+y^2)f'(ty)t$$

é contínua, o teorema de Picard diz que existe uma solução única $y = \phi(t)$ num vizinhança aberta da origem tal que $\phi(0) = 0$.

(1.5 val.) b) Suponha que, adicionalmente, f satisfaz $f(x) \geq 1$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Mostre que o intervalo máximo de definição da solução do problema de valor inicial é majorado.

Resolução:

$$\dot{y} = (1+y^2)f(ty) \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{y}}{1+y^2} = f(ty)$$

Integrando em t obtem-se

$$\int_0^t \frac{\dot{y}(s)}{1+y^2(s)}\,ds = \int_0^t f(s\,y(s))\,ds$$

pelo que

$$\arctan y(t) - \arctan y(0) = \int_0^t f(s\,y(s))\,ds$$

Visto $y(0) = 0$

$$y(t) = \tan\Big(\int_0^t f(s\,y(s))\,ds\Big)$$

Se $f(x) \geq 1$ e atendendo a que a função tangente é monótona crescente em $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, podemos escrever

$$y(t) \geq \tan\Big(\int_0^t 1\,ds\Big) = \tan t$$

Como $\lim\limits_{t \to \frac{\pi}{2}} \tan t = \infty$ a solução explode e como tal o intervalo máximo de definição da solução do problema de valor inicial é majorado.