Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática IV

2º Semestre 2004/2005

1º Teste

Cursos: LEAN, LEC, LEEC, LEIC, LEMat, LEM, LEGM

23 de Abril de 2005

Resolução do Teste

(2,5 val.) **1.** Seja $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função dada por:

$$u(x,y) = e^x(x\cos y - y \operatorname{sen} y),$$

(a) Mostre que u é harmónica e determine uma função inteira f com parte real u.

(b) Para a função f que calculou em (i), determine $f'(0)$.

(c) Para essa mesma função, calcule:

$$\oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^2}\, dz.$$

Solução:

(a) Calculando as derivadas parciais, obtemos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x(x\cos y - y\operatorname{sen} y + \cos y), \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x(x\operatorname{sen} y + y\cos y + \operatorname{sen} y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^x(x\cos y - y\operatorname{sen} y + 2\cos y), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^x(x\cos y - y\operatorname{sen} y + 2\cos y).$$

Logo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

donde u é uma função harmónica.

Se $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ é uma função analítica com parte real u, então u e v satisfazem as equações de Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = e^x(x\operatorname{sen} y + y\cos y + \operatorname{sen} y), \\ \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = e^x(x\cos y - y\operatorname{sen} y + \cos y). \end{cases}$$

Primitivando ambos os lados destas igualdades, obtemos:

$$\begin{cases} v(x,y) = e^x(x\operatorname{sen} y + y\cos y) + h(y), \\ \\ v(x,y) = e^x(x\operatorname{sen} y + y\cos y) + g(x). \end{cases}$$

Comparando estas expressões, vemos que $h(y) = g(x) = C$ é uma constante (real). Logo a função procurada é:

$$f(x+iy) = e^x(x\cos y - y \operatorname{sen} y) + ie^x(x \operatorname{sen} y + y\cos y) + iC,$$

onde podemos escolher $C \in \mathbb{R}$ arbitrário.

Nota: Embora não sendo necessário para resolver o problema, pode-se observar que a expressão de f em termos de $z = x + iy$ é:

$$f(z) = ze^z + iC.$$

(b) Recordemos que se $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ é analítica, então:

$$f'(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Em particular:

$$f'(0) = \frac{\partial u}{\partial x}(0,0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = 1 - i0 = 1.$$

Nota: Poderia também observar que, sendo $f(z) = ze^z + iC$, temos $f'(z) = e^z + ze^z$. Assim, $f'(0) = e^0 = 1$.

(c) Pelo fórmula integral de Cauchy para a derivada:

$$\oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^2}\, dz = 2\pi i f'(0) = 2\pi i.$$

(2,5 val.) **2.** Considere a função $f : \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 1}$$

(a) Determine o desenvolvimento de f em série de Laurent válido na região $0 < |z - 1| < 2$.

(b) Utilize a alínea anterior para determinar

$$\oint_\gamma f(z)\, dz \quad , \quad \gamma = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z - 1| = \frac{1}{2005}\}$$

onde a curva γ é percorrida uma vez no sentido directo.

(c) Justifique que f admite um desenvolvimento em série de Taylor em torno de $z_0 = i/3$. **Sem** determinar a série, indique o seu raio de convergência.

Solução:

(a) Observe que:

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 1} = \frac{1/2}{z - 1} + \frac{1/2}{z + 1}.$$

Assim, basta determinar a série de Laurent do segundo factor:

$$\begin{aligned}\frac{1/2}{z+1} &= \frac{1/2}{2 + z - 1} \\ &= \frac{1/2}{2(1 + \frac{z-1}{2})} \\ &= \frac{1}{2^2} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \left(\frac{z-1}{2}\right)^k,\end{aligned}$$

onde na última igualdade utilizámos o facto que a série geométrica converge para $\left|\frac{z-1}{2}\right| < 1$, ou seja, para $|z - 1| < 2$.

Assim, concluímos que a série de Laurent de f na região $0 < |z - 1| < 2$ é:

$$f(z) = \frac{1/2}{z - 1} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^{k+2}} (z - 1)^k.$$

(b) Como a curva γ é uma curva simples, fechada, contida na região $0 < |z - 1| < 2$, onde é válida a expansão de f que determinámos em (a), concluímos que:

$$\oint_\gamma f(z)\, dz = \oint_\gamma \frac{1/2}{z - 1}\, dz = \frac{1}{2} 2\pi i = \pi i.$$

(c) A função f é o quociente de duas funções analíticas, em que o denominador se anula em $z = \pm 1$. Logo f é uma função analítica no aberto $\mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$ e, portanto, possuí um desenvolvimento em série de Taylor em torno de qualquer ponto deste aberto. Assim, f admite um desenvolvimento em série de Taylor em torno de $z_0 = i/3$. Essa série converge no maior disco centrado em $z_0 = i/3$ e contido em $\mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$. Como

$$|i/3 - 1| = |i/3 - (-1)| = \sqrt{\frac{1}{9} + 1} = \frac{\sqrt{10}}{3},$$

concluímos que o raio de convergência é $\sqrt{10}/3$.

(2 val.) **3.** Determine

$$\oint_\gamma \Big(\frac{e^z-1}{e^{2z}-1} + (z-2)e^{1/z}\Big)\,dz$$

em que $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z-i| + |z+i| = 3\}$ é percorrida uma vez no sentido directo.

Solução: Oberve que a função em questão é analítica excepto em $z = 0$ e nos pontos:

$$e^{2z} - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = k\pi i \ (k \in \mathbb{Z}),$$

onde possui singularidades isoladas. Destes pontos, apenas a origem está no interior da elipse $|z-i| + |z+i| = 3$, pois

$$|k\pi i - i| + |k\pi i + i| = |k\pi - 1| + |k\pi + 1| > 3, \text{ se } k \neq 0.$$

Assim, temos de estudar o comportamento da nossa função na origem.

Para o primeiro factor, observe que:

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{e^{2z}-1} &= \lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{(e^z-1)(e^z+1)}\\ &= \lim_{z\to 0}\frac{1}{e^z+1} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Logo $\frac{e^z-1}{e^{2z}-1}$ possui uma singularidade removível na origem. Assim:

$$\oint_\gamma \frac{e^z-1}{e^{2z}-1}\,dz = 0.$$

Por outro lado, para o segundo factor, observe que se $z \neq 0$, temos:

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \cdots$$

logo

$$\begin{aligned}(z-2)e^{1/z} &= z\Big(1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \cdots\Big) - 2\Big(1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \cdots\Big)\\ &= z + \Big(\frac{1}{1!} - 2\Big) + \Big(\frac{1}{2!} - \frac{2}{1!}\Big)\frac{1}{z} + \Big(\frac{1}{3!} - \frac{2}{2!}\Big)\frac{1}{z^2} + \cdots\\ &= z - 1 - \frac{3/2}{z} - \frac{5/6}{z^2} + \cdots\end{aligned}$$

Assim, temos que:

$$\oint_\gamma (z-2)e^{1/z}\,dz = -\frac{3}{2}\oint_\gamma \frac{1}{z}\,dz = -3\pi i.$$

Portanto, o valor do integral pedido é

$$\oint_\gamma \Big(\frac{e^z-1}{e^{2z}-1} + (z-2)e^{1/z}\Big)\,dz = -3\pi i.$$

(2 val.) **4.** Recorrendo ao Teorema dos Resíduos, mostre que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2} - \cos\theta} = 2\pi.$$

Solução: Podemos transformar o integral (real) num integral de linha no plano complexo:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2} - \cos\theta} &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2} - \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}} \frac{ie^{i\theta}\, d\theta}{ie^{i\theta}} \\
&= \oint_{|z|=1} \frac{1}{\sqrt{2} - \frac{z+1/z}{2}} \frac{dz}{iz} \\
&= -\frac{2}{i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 - 2\sqrt{2}z + 1}
\end{aligned}$$

Recorrendo à fórmula resolvente, verificamos que:

$$z^2 - 2\sqrt{2}z + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \sqrt{2} \pm 1.$$

Como $\sqrt{2}+1$ está no exterior do círculo unitário e $\sqrt{2}-1$ está no seu interior, o Teorema dos Resíduos mostra que:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2} - \cos\theta} = -4\pi \mathrm{Res}\Big(\frac{1}{z^2 - 2\sqrt{2}z + 1}, \sqrt{2} - 1\Big).$$

Finalmente, para calcular o resíduo, notamos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to\sqrt{2}-1}(z - \sqrt{2} + 1)\frac{1}{z^2 - 2\sqrt{2}z + 1} &= \lim_{z\to\sqrt{2}-1} \frac{z - \sqrt{2} + 1}{(z - \sqrt{2} - 1)(z - \sqrt{2} + 1)} \\
&= \lim_{z\to\sqrt{2}-1} \frac{1}{z - \sqrt{2} - 1} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Como este limite existe e é não-nulo, concluímos que $z_0 = \sqrt{2} - 1$ é um polo de 1ª ordem e o resíduo é o valor do limite:

$$\mathrm{Res}\Big(\frac{1}{z^2 - 2\sqrt{2}z + 1}, \sqrt{2} - 1\Big) = -\frac{1}{2}.$$

Assim:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2} - \cos\theta} = 2\pi.$$

(1 val.) **5.** Se f é uma função analítica no anel $0 < |z - z_0| < R$, com um polo de ordem k em z_0, mostre que a função $\frac{f'}{f}$ possui um polo de 1ª ordem em z_0 e calcule o resíduo Res($\frac{f'}{f}$,z_0).

Solução: No anel $0 < |z - z_0| < R$ a função f admite a expansão em série de Laurent:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{b_k}{(z-z_0)^k} + \frac{b_{k-1}}{(z-z_0)^{k-1}} + \cdots \\ &= \frac{1}{(z-z_0)^k}\left[b_k + b_{k-1}(z-z_0) + \cdots\right] \end{aligned}$$

Esta série converge uniformemente em qualquer anel $\epsilon \leq |z - z_0| \leq r$, com $0 < \epsilon < r < R$. Assim, podemos derivar a série termo a termo, concluindo que no mesmo anel a derivada $f'(z)$ é representada pela série:

$$\begin{aligned} f'(z) &= -\frac{kb_k}{(z-z_0)^{k+1}} - \frac{(k-1)b_{k-1}}{(z-z_0)^k} - \cdots \\ &= \frac{1}{(z-z_0)^{k+1}}\left[-kb_k - (k-1)b_{k-1}(z-z_0) - \cdots\right] \end{aligned}$$

Queremos testar se z_0 é um polo de 1ª ordem de $\frac{f'}{f}$, logo calculamos o limite:

$$\lim_{z \to z_0}(z-z_0)\frac{f'(z)}{f(z)} = \lim_{z \to z_0}\frac{-kb_k - (k-1)b_{k-1}(z-z_0) - \cdots}{b_k + b_{k-1}(z-z_0) + \cdots} = -k.$$

Como o limite existe e é não-nulo, concluímos que z_0 é um polo de 1ª ordem. O seu resíduo é o valor do limite:

$$\text{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}, z_0\right) = -k.$$