Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática IV

$2^{\underline{o}}$ Semestre 2004/2005

1º Teste (Recuperação)

Cursos: LEC, LEEC, LEIC, LEM, LEMat, LEAN e LEGM

18 de Junho de 2005

Duração do Teste: 1h30m

Justifique cuidadosamente todas as respostas.

(2 val.) **1.** Seja $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função dada por:

$$u(x,y) = 2x(1-y)\,.$$

(a) Mostre que u é harmónica e determine a função inteira $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} f(x+iy) = u(x,y)$, para qualquer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e $f(0) = 3i$.

(b) Calcule:

$$\oint_{|z-2|=1} \frac{f(z)}{(z-2)^2} dz,$$

onde a circunferência é percorrida uma vez no sentido directo.

(3 val.) **2.** Considere a função de variável complexa definida por

$$f(z) = \frac{1-e^z}{z^3(z-1)}.$$

(a) Determine os primeiros termos do desenvolvimento de f em série de Laurent válido na região $0 < |z| < 1$.

(b) Utilize a alínea anterior para determinar

$$\oint_\gamma f(z)\,dz, \quad \gamma = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| = \frac{1}{2005}\}$$

onde a curva γ é percorrida uma vez no sentido directo.

(c) Mostre que f admite um desenvolvimento em série de Taylor em torno de $z_0 = 1+i$. **Sem** determinar a série, indique o seu raio de convergência.

(2 val.) **3.** Determine o valor do integral

$$\oint_C \frac{z^2}{(e^z-1)(z^2-1)}\,dz,$$

em que $C = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| = 2\}$ é percorrida uma vez no sentido directo.

(2 val.) **4.** Recorrendo ao Teorema dos Resíduos, mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+13} = \frac{\pi}{3}.$$

(1 val.) **5.** Se $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ é uma função harmónica no disco $|z - z_0| < R$, mostre que

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + Re^{i\theta})\,d\theta.$$