Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática IV
2º Semestre 2004/2005

2º Teste

Cursos: LEAN, LEC, LEEC, LEIC, LEMat, LEM, LEGM

9 de Junho de 2005, 17h

Resolução do Teste

(2 val.) **1.** Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$x + y\cos x + \operatorname{sen} x\,\frac{dy}{dx} = 0, \quad y(1) = 0$$

indicando o intervalo máximo de existência de solução.

Solução: A equação é da forma

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$

em que $M(x,y) = x + y\cos x$, $N(x,y) = \operatorname{sen} x$. Dado que ambas as funções são de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$ (são polinomiais), e

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \cos x = \frac{\partial N}{\partial x}$$

concluimos que se trata de uma equação exacta, pelo que existe uma função $\Phi(t,x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tal que

$$\nabla\Phi = (M,N) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial\Phi}{\partial x} = x + y\cos x, \\ \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} = \operatorname{sen} x. \end{cases}$$

Integrando este sistema, obtemos, por exemplo, a solução

$$\Phi(x,y) = \frac{x^2}{2} + y\operatorname{sen} x,$$

pelo que as soluções da equação diferencial são dadas por:

$$\frac{x^2}{2} + y\operatorname{sen} x = C \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{C - x^2/2}{\operatorname{sen} x}.$$

Como estamos interessados na solução que satisfaz a condição inicial $y(1) = 0$, temos que:

$$0 = \frac{C - 1/2}{\operatorname{sen} 1} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{2},$$

portanto, a solução procurada é:

$$y(x) = \frac{1 - x^2}{2\operatorname{sen} x}.$$

Esta solução está definida para sen $x \neq 0$, i.e., $x \neq n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$). Como $1 \in]0, \pi[$ e:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1 - x^2}{2\,\text{sen}\, x} = +\infty, \qquad \lim_{x \to \pi^-} \frac{1 - x^2}{2\,\text{sen}\, x} = -\infty,$$

concluimos que o intervalo máximo de existência de solução é $]0, \pi[$.

(2,5 val.) **2.** Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} \pi & 1 & 0 \\ 0 & \pi & 1 \\ 0 & 0 & \pi \end{bmatrix}.$$

Calcule a matriz e^{At} e determine a solução do PVI

$$X' = AX, \quad X(\pi) = (1, -1, 0).$$

Solução: Observe que a matriz dada já está na forma canónica de Jordan (é um bloco de Jordan 3×3, correspondente a um valor próprio $\lambda = \pi$). Sendo assim, a sua exponencial é dada por:

$$e^{At} = \exp\left(t \begin{bmatrix} \pi & 1 & 0 \\ 0 & \pi & 1 \\ 0 & 0 & \pi \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} e^{t\pi} & te^{t\pi} & \frac{t^2}{2}e^{t\pi} \\ 0 & e^{t\pi} & te^{t\pi} \\ 0 & 0 & e^{t\pi} \end{bmatrix}.$$

Por sua vez, a solução do problema de valor inicial é dada por:

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{A(t-\pi)}X(\pi) \\ &= \begin{bmatrix} e^{(t-\pi)\pi} & (t-\pi)e^{(t-\pi)\pi} & \frac{(t-\pi)^2}{2}e^{(t-\pi)\pi} \\ 0 & e^{(t-\pi)\pi} & (t-\pi)e^{(t-\pi)\pi} \\ 0 & 0 & e^{(t-\pi)\pi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (1 - t + \pi)e^{(t-\pi)\pi} \\ -e^{(t-\pi)\pi} \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(2 val.) **3.** Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$\frac{d^4y}{dx^4} - y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = y''(0) = 0, y'''(0) = -1.$$

Solução: Trata-se de uma equação linear homogénea de ordem 4. A equação característica associada é:

$$r^4 - 1 = (r^2 - 1)(r^2 + 1) = 0,$$

e tem duas raízes simples reais $r = \pm 1$ e duas raízes simples complexas conjugadas $r = \pm i$. Assim, a solução geral da equação é dada por:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \text{sen}\, x.$$

Impondo as condições iniciais, obtemos os valores das coeficientes:

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 0 \\ y'''(0) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 1 \\ C_1 - C_2 + C_4 = 0 \\ C_1 + C_2 - C_3 = 0 \\ C_1 - C_2 - C_4 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 1/2 \\ C_3 = 1/2 \\ C_4 = 1/2 \end{cases}$$

Assim, a solução procurada é $y(x) = 1/2(e^{-x} + \cos x + \text{sen}\, x)$.

(3 val.) **4.** Considere o seguinte problema de valores na fronteira

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & \text{para} \quad (x,y) \in]0,1[\times]0,1[, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,y) = 0, & \text{para} \quad y \in [0,1], \\ u(x,0) = 0 \ , \ \ u(x,1) = f(x), & \text{para} \quad x \in [0,1]. \end{cases} \tag{1}$$

em que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1/2, \\ \\ -1 & \text{se} \quad 1/2 < x \leq 1. \end{cases}$$

(a) Determine a série de cosenos da função f no intervalo $[0,1]$ e indique para que valores converge a série.

(b) Resolva o problema (1).

Solução: (a) Para obter a expansão de f numa série de cosenos, consideramos a *extensão par* de f ao intervalo $[-1,1]$, i.e., a função dada por:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1, \\ \\ f(-x) & \text{se} \quad -1 \leq x < 0. \end{cases}$$

A série procurada é a série de Fourier da função $\tilde{f}$ no intervalo $[-1,1]$ que, por $\tilde{f}$ ser par, é uma série de coenos:

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{cos}\ (n\pi x)\,.$$

Os coeficientes a_0 e a_n são dados por:

$$a_0 = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} \tilde{f}(x)\,dx = 2\int_0^1 f(x)\,dx = 0$$

e

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} \tilde{f}(x)\text{cos}\ (n\pi x)\ dx \qquad (n>0) \\ &= 2\int_0^1 f(x)\text{cos}\ (n\pi x)\ dx \\ &= 2\left(\int_0^{1/2} \text{cos}\ (n\pi x)\ dx - \int_0^{1/2} \text{cos}\ (n\pi x)\ dx\right) = \frac{4}{n\pi}\text{sen}\ \left(\frac{n\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Como $\tilde{f}$ é contínua por troços, com derivada contínua por troços, a série converge para $\tilde{f}(x)$ nos pontos onde a função é contínua e para a média dos limites laterais, nos pontos de descontinuidade, ou seja:

$$S_f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad 0 \leq x < 1/2, \\ 0 & \text{se} \quad x = 1/2 \\ -1 & \text{se} \quad 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$

(b) Recorremos ao método de separação de variáveis para procurar soluções da forma:

$$u(x,y) = X(x)Y(y).$$

Substituindo na equação, obtemos:

$$X''Y + XY'' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{X''}{X}(x) = -\frac{Y''}{Y}(y) = k,$$

para um constante k. Recorrendo às condições fronteira, obtemos:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = X'(0)Y(y) = 0, \\ \\ \frac{\partial u}{\partial x}(1,y) = X'(1)Y(y) = 0. \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} X'(0) = 0, \\ \\ X'(1) = 0. \end{cases}$$

Assim, precisamos de resolver o problema de valores fronteira:

$$X''(x) - kX(x) = 0, \quad X'(0) = X'(1) = 0 \quad (0 < x < 1).$$

Este problema só tem soluções não-triviais se $k = 0$, caso em que

$$X(x) = C_0 \qquad , \qquad C_0 \text{ constante}$$

e $k = -(n\pi)^2$, onde $n \in \mathbb{Z}$, e nesse caso as soluções são dadas por:

$$X(x) = C\cos(n\pi x).$$

Consideremos agora a equação para a função $Y(y)$. temos que:

$$u(x,0) = X(x)Y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad Y(0) = 0.$$

Assim, ou $Y(y)$ é solução da ODE(correspondente ao caso $k = 0$):

$$Y''(y) = 0, \quad Y(0) = 0,$$

sendo a solução dadas por:

$$Y(y) = B_0 y,$$

ou $Y(y)$ é solução da ODE(correspondente ao caso $k = -n^2\pi^2$)

$$Y''(y) - (n\pi)^2 Y(y) = 0, \quad Y(0) = 0.$$

sendo as soluções dadas por:

$$Y(y) = B\operatorname{senh}(n\pi y).$$

Assim, as soluções do nosso problema são da forma:

$$u(x,y) = A_0 y + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\pi x)\operatorname{senh}(n\pi y).$$

Os coeficientes A_n são determinados a partir da condição fronteira que ainda não utilizámos:

$$u(x,1) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos(n\pi x)\operatorname{senh}(n\pi) = f(x), \quad (x \in [0,1]).$$

Assim, obtemos os A_n a partir dos coeficientes da expansão de f numa série de cosenos no intervalo $[0,1]$. Pelo resultado da alínea (a), obtemos:

$$A_0 = 0 \quad \text{e} \quad A_n = \frac{4}{n\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

(1 val.) **5.** Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável, tal que $f(t,y) + y$ é limitada. Considere o PVI

$$y' = f(t,y), \quad y(0) = 1.$$

Mostre que a solução do PVI está definida e é limitada em $[0, \infty[$.

Solução: Por hipótese, temos que existe $M > 0$ tal que:

$$-M \leq f(t,y) + y \leq M \quad \Leftrightarrow \quad -M - y \leq f(t,y) \leq M - y.$$

Assim, se $u(t)$ e $v(t)$ designam as soluções dos PVI:

$$\begin{cases} u' = -M - u, \\ \\ u(0) = 1. \end{cases} \qquad \begin{cases} v' = M - v, \\ \\ v(0) = 1. \end{cases}$$

temos que:

$$u(t) \leq y(t) \leq v(t),$$

para todo o $t \geq 0$ em que $u(t)$ e $v(t)$ estejam definidas.

As soluções dos PVI obtém-se imediatamente notando que são equações separáveis:

$$u(t) = -M + (1+M)e^{-t}, \quad v(t) = M + (1-M)e^{-t}.$$

Observe que estas funções estão definidas e são limitadas para todo o $t \geq 0$. Assim, a solução $y(t)$ do PVI original satisfaz

$$-M + (1+M)e^{-t} \leq y(t) \leq M + (1-M)e^{-t}, \quad \forall t \geq 0,$$

donde está definida e é limitada em $[0, \infty[$.