Análise Matemática IV

1º Teste

10 de Novembro de 2003

Licenciatura em Engenharia Civil

Duração do teste: 1 h e 30 min
Enunciado e resolução

(3 val) **1.** Seja a função definida em $\mathbb{R}^2$ por $v(x,y) = 4x^3y - 4xy^3$.

a) Verifique que v é harmónica em $\mathbb{R}^2$.

b) Determine a função $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ é analítica em $\mathbb{C}$ e $f(0) = \sqrt{2}$.

Resolução:

a) Por ser polinomial, v é de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$; além disso,

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 24xy - 24xy = 0,$$

pelo que v é harmónica em $\mathbb{R}^2$.

b) Pretende-se que f seja analítica em $\mathbb{C}$, pelo que u e v têm que verificar as condições de Cauchy-Riemann em $\mathbb{R}^2$. Assim sendo:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \;\Rightarrow\; \frac{\partial u}{\partial x} = 4x^3 - 12xy^2 \;\Rightarrow\; u(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + f(y).$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \;\Rightarrow\; -12x^2y + f'(y) = -12x^2y + 4y^3 \;\Rightarrow\; f(y) = y^4 + c,$$

pelo que

$$u(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + c.$$

Para calcular c:

$$f(0) = \sqrt{2} \;\Rightarrow\; \begin{cases} u(0,0) = \sqrt{2} \\ v(0,0) = 0 \end{cases} \;\Rightarrow\; c = \sqrt{2}.$$

Concluímos então que:

$$f(z) = f(x+iy) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + \sqrt{2} + i(4x^3y - 4xy^3).$$

(6 val) **2.** Considere a função $f : \mathbb{C} \setminus \{10\} \to \mathbb{C}$ dada por:

$$f(z) = \frac{z-1}{10-z}$$

a) Obtenha um desenvolvimento em série de Taylor da função f em torno do ponto $z_0 = 0$. Indique a região do plano complexo onde a série obtida converge para $f(z)$.

b) Mostre que, para $r \in \mathbb{R}^+$ suficientemente pequeno:

$$\int_{|z-1|=100} \frac{f(z)}{z^{100}}\, dz = \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{100}}\, dz + \int_{|z-10|=r} \frac{f(z)}{z^{100}}\, dz$$

Indique os valores de r para os quais pode garantir a validade da igualdade anterior.

c) Determine o valor do integral:

$$\int_{|z-1|=100} \frac{z-1}{(10-z)z^{100}}\, dz,$$

onde a circunferência é percorrida uma vez no sentido directo.

Resolução:

a) Recorrendo à série geométrica:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{z-1}{10-z} = \frac{\frac{z-1}{10}}{1-\frac{z}{10}} = \frac{z-1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{10}\right)^n \\
&= (z-1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{10^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{10^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{10^{n+1}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{10^n} - \frac{1}{10} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{10^{n+1}} = -\frac{1}{10} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10^n} - \frac{1}{10^{n+1}}\right)z^n \\
&= -\frac{1}{10} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{9z^n}{10^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Podemos garantir a convergência (absoluta) desta série para:

$$\left|\frac{z}{10}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |z| < 10.$$

b) O Teorema de Cauchy (versão generalizada) garante que o resultado é válido para todos os valores de r tais que

(i) a curva $|z| = r$ circule apenas a singularidade $z = 0$

(ii) a curva $|z - 10| = r$ circule apenas a singularidade $z = 10$

Consequentemente, teremos que ter $0 < r < 10$.

c) Pela alínea anterior, e utilizando $r = 1$ (por exemplo):

$$\int_{|z-1|=100} \frac{f(z)}{z^{100}}\, dz = \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^{100}}\, dz + \int_{|z-10|=1} \frac{f(z)}{z^{100}}\, dz.$$

Como f é analítica em $|z| < 10$, usando o desenvolvimento em série de Taylor de f calculado na alínea (a):

$$\int_{|z|=1} \frac{z-1}{(10-z)z^{100}} dz = \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^{100}}\, dz = 2\pi i a_{99} = 2\pi i \frac{9}{10^{100}} = \frac{18\pi i}{10^{100}}.$$

Quanto ao outro integral, atendendo a que a função $g(z) = \frac{z-1}{z^{100}}$ é analítica em $|z - 10| < 2$, resulta da fórmula integral de Cauchy que:

$$\int_{|z-10|=1} \frac{f(z)}{z^{100}}\, dz = -\int_{|z-10|=1} \frac{g(z)}{z-10}\, dz = -2\pi i g(10) = -\frac{2\pi i}{10^{100}}.$$

Assim sendo

$$\int_{|z-1|=100} \frac{z-1}{(10-z)z^{100}} dz = \frac{18\pi i}{10^{100}} - \frac{2\pi i}{10^{100}} = \frac{16\pi i}{10^{100}}.$$

(4 val) **3.** Considere a função complexa de variável complexa:

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen}(z+4i)}{z^4 + 16z^2}$$

a) Determine e classifique as singularidades de f.

b) Calcule

$$\int_C f(z)\, dz$$

onde C é a circunferência $|z+2i| = 7$ percorrida duas vezes no sentido directo.

Resolução:

a) Por f ser um quociente de funções inteiras, as singularidades de f são os zeros do denominador:

$$z^4 + 16z^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; z = 0 \;\text{ ou }\; z = 4i \;\text{ ou }\; z = -4i.$$

Para classificar as singularidades, podemos escrever:

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen}(z+4i)}{z^2(z-4i)(z+4i)}.$$

É então claro que:

$$\lim_{z\to 0} z^2 f(z) = \frac{\operatorname{sen}(4i)}{16} = \frac{e^{-4}-e^{4}}{(16)(2i)} = -\frac{\operatorname{sh} 4}{16i} = \frac{i\operatorname{sh} 4}{16} \neq 0,$$

pelo que 0 é um pólo de segunda ordem;

$$\lim_{z\to 4i} (z-4i) f(z) = \frac{\operatorname{sen}(8i)}{(-16)(8i)} = \frac{i\operatorname{sh} 8}{16\cdot 8} \neq 0,$$

pelo que $4i$ é um pólo simples. Quanto à singularidade $-4i$, notando desde já que $\lim_{z\to -4i} \frac{\operatorname{sen}(z+4i)}{z+4i} = 1$, resulta que:

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to -4i} f(z) &= \lim_{z\to -4i} \frac{\operatorname{sen}(z+4i)}{z+4i} \lim_{z\to -4i} \frac{1}{z^2(z-4i)} \\
&= 1\cdot \frac{1}{(-16)(-8i)} = \frac{1}{16\cdot 8i}\ ,
\end{aligned}$$

pelo que $-4i$ é uma singularidade removível.

b) Seja C_1 a circunferência $|z+2i| = 7$ percorrida uma vez no sentido directo. Então $C = C_1 \cup C_1$, onde C_1 é a mesma circunferência mas percorrida apenas uma vez (no sentido directo); recorrendo também ao teorema dos resíduos, resulta que:

$$\int_C f(z)\,dz = 2\int_{C_1} f(z)\,dz = 4\pi i\Big(\operatorname{Res}(f,0) + \operatorname{Res}(f,4i) + \operatorname{Res}(f,-4i)\Big).$$

Como $-4i$ é uma singularidade removível, $\operatorname{Res}(f,-4i) = 0$. Conforme foi calculado, na alínea anterior:

$$\operatorname{Res}(f,4i) = \lim_{z\to 4i} (z-4i) f(z) = \frac{i\operatorname{sh} 8}{16\cdot 8}\ .$$

Como 0 é um polo de ordem 2, o seu resíduo é dado por:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f,0) &= \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\Big(z^2 f(z)\Big) = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left(\frac{\operatorname{sen}(z+4i)}{z^2+16}\right) \\
&= \lim_{z\to 0} \frac{(z^2+16)\cos(z+4i) - 2z\operatorname{sen}(z+4i)}{(z^2+16)^2} \\
&= \frac{16\cos 4i}{16^2} = \frac{\operatorname{ch} 4}{16}
\end{aligned}$$

Finalmente

$$\int_C f(z)\,dz = 4\pi i\left(\frac{\operatorname{ch} 4}{16} + \frac{i\operatorname{sh} 8}{16\cdot 8}\right) = -\frac{\pi\operatorname{sh} 8}{32} + i\,\frac{\pi\operatorname{ch} 4}{4}$$

(4 val) **4.** Utilizando o teorema dos resíduos, calcule:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\, dx$$

Resolução:

Seja $R \in \mathbb{R}^+$, e considere-se a curva $\gamma_R = I_R \cup C_R \cup J_R$, onde:

$$\begin{aligned} I_R &= \left\{ x \in \mathbb{C} : 0 \leq x \leq R \right\} \\ C_R &= \left\{ Re^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \pi/2 \right\} \\ J_R &= \left\{ iy \in \mathbb{C} : R \geq y \geq 0 \right\} \end{aligned}$$

O interior da curva γ_R é o quarto do círculo de raio R, centrado na origem e contido no 1º quadrante. (Faça uma figura!) Seja:

$$f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}.$$

As singularidades de f são dadas por

$$1 + z^4 = 0 \Leftrightarrow z = e^{i\left(\frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}\right)}, \quad \text{onde } n = 0, 1, 2, 3.$$

Note-se que apenas $e^{i\pi/4}$ pertence ao interior de γ_R (admitindo que $R > 1$ — o que não constitui problema pois vamos fazer $R \to \infty$). Pelo teorema dos resíduos:

$$\oint_{\gamma_R} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(f, e^{i\pi/4}\right)$$

Como $e^{i\pi/4}$ deverá ser um polo simples, começemos por calcular:

$$\lim_{z \to e^{\frac{i\pi}{4}}} \frac{\left(z - e^{\frac{i\pi}{4}}\right) z^2}{1+z^4} = i \lim_{z \to e^{\frac{i\pi}{4}}} \frac{z - e^{\frac{i\pi}{4}}}{1+z^4}.$$

O último limite é uma indeterminação $\frac{0}{0}$. Pela regra de Cauchy:

$$\lim_{z \to e^{\frac{i\pi}{4}}} \frac{z - e^{\frac{i\pi}{4}}}{1+z^4} = \lim_{z \to e^{\frac{i\pi}{4}}} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4} e^{-\frac{3\pi i}{4}}.$$

Desta forma, $e^{i\pi/4}$ é um polo simples e:

$$\operatorname{Res}\left(f, e^{\frac{i\pi}{4}}\right) = \frac{i}{4} e^{-\frac{3\pi i}{4}} = \frac{1}{4} e^{-\frac{i\pi}{4}}.$$

Assim sendo:

$$\oint_{\gamma_R} f(z)dz = \frac{2\pi i}{4} e^{-\frac{i\pi}{4}} = \frac{1}{2}\pi e^{\frac{i\pi}{4}}$$

Procuremos agora relacionar $\oint_{\gamma_R} f(z)dz$ com o integral impróprio pretendido. Parametrizando I_R e J_R, obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_{I_R} f(z)dz &= \int_0^R \frac{x^2}{1+x^4}\, dx \\
\int_{J_R} f(z)dz &= \int_R^0 \frac{(iy)^2}{1+(iy)^4}\, i\, dy = -i\int_R^0 \frac{y^2}{1+y^4}\, dy = i\int_0^R \frac{y^2}{1+y^4}\, dy
\end{aligned}$$

Desta forma:

$$\int_{I_R \cup J_R} f(z)dz = (1+i)\int_0^R \frac{x^2}{1+x^4}\, dx = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}} \int_0^R \frac{x^2}{1+x^4}\, dx$$

Por outro lado, como $f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$ (onde $\mathrm{Grau}(1+z^4) - \mathrm{Grau}(z^2) = 2 \geq 2$), resulta que:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)dz = 0.$$

Desta forma,

$$\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}} \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\, dx = \lim_{R\to\infty} \oint_{\gamma_R} f(z)dz = \frac{1}{2}\pi e^{\frac{i\pi}{4}},$$

pelo que:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\, dx = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi.$$

Nota: alternativamente, poder-se-ía ter usado o facto de que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\, dx,$$

calculando o integral do 2º membro da expressão anterior através do contorno $\Gamma_R = L_R \cup C'_R$, onde:

$$\begin{aligned}
L_R &= \Big\{x \in \mathbb{C} : -R \leq x \leq R\Big\} \\
C'_R &= \Big\{Re^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \pi\Big\}
\end{aligned}$$

Note-se que o interior de Γ_R contém duas singularidades de f, cujos resíduos teriam que ser calculados.

(3 val) **5.** Determine a solução do problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' + \left(3 + \dfrac{1}{1-x}\right) y &= \dfrac{e^{-3x}}{1-x} \\ \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

Indique o intervalo máximo de definição da solução que obteve.

Resolução:

Trata-se de um problema de valor inicial para uma equação diferencial linear não homogénea (de 1ª ordem). Um factor integrante é dado por:

$$\mu(x) = \exp\left(\int 3 + \frac{1}{1+x}\, dx\right) = e^{3x - \log|1-x|}$$

Note-se que a equação diferencial é uma igualdade válida para todos os valores de $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$. Por isso, uma solução da mesma não pode conter simultaneamente o ponto inicial, $x = 0$ e quaisquer pontos $x > 1$, pois nunca pode estar definida em $x = 1$. Assim sendo, $1 - x > 0$, donde $|1 - x| = 1 - x$. Resulta então que:

$$\mu(x) = e^{3x - \log(1-x)} = e^{3x} e^{\log(1-x)^{-1}} = \frac{e^{3x}}{1-x}$$

Multiplicando pelo factor integrante, obtém-se a equação (equivalente à original para $x < 1$):

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{3x}}{1-x} y\right) = \frac{e^{3x}}{1-x}\frac{e^{-3x}}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Primitivando (relativamente a x), obtém-se:

$$\frac{e^{3x}}{1-x} y = \frac{1}{1-x} + C \Leftrightarrow y = e^{-3x} + C(1-x)e^{-3x}$$

Esta é a solução geral da equação diferencial, válida para $x < 1$.

Determinemos agora o valor de C que está de acordo com a condição inicial:

$$1 = y(0) = 1 + C \Rightarrow C = 0$$

Desta forma, a solução do problema de valor inicial é:

$$y(x) = e^{-3x}$$

De acordo com o que vimos, a solução obtida é válida para $x \in]-\infty, 1[$, e não admite extensão para valores de $x \geq 1$, pois <u>não há soluções da equação definidas em $x = 1$</u>. Em consequência, o intervalo máximo de definição da solução é $]-\infty, 1[$.