Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

$1^{\underline{o}}$ Teste de Análise Matemática IV

$2^{\underline{o}}$ Semestre 2003/2004

Cursos: LEEC, LEMat

3 de Abril 2004, 10h30m às 11h30m

INSTRUÇÕES

- **Não abra este caderno de teste** antes de ser anunciado o início da prova.
- Preencha os seus dados nesta folha.
- Apresente e justifique todos os cálculos.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta, incluindo máquinas de calcular.

Pergunta	cotação	classificação
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
Total		

Nome: ____________________ **Sala:** __________

Nº: ____________________

Curso: ____________________ **Rúbrica (DOCENTE):**

1. (a) Determine todos os valores de $\sqrt[3]{1+i}$

Atendendo a que

$$1+i=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$$

tem-se, aplicando a fórmula de De Moivre

$$\sqrt[3]{1+i}=\sqrt[3]{\sqrt{2}}e^{\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}i} \quad , \quad k=0,1.2$$

pelo que as raízes cúbicas de $1+i$ serão

$$\sqrt[6]{2}\,e^{\frac{\pi}{12}i} \quad , \quad \sqrt[6]{2}\,e^{\frac{9\pi}{12}i} \quad , \quad \sqrt[6]{2}\,e^{\frac{17\pi}{12}i}$$

(b) Estude o domínio de analiticidade da função $f(z)=f(x+iy)=2x^2+i3y^3$

Comecemos por determinar os pontos onde f admite derivada. Sendo $\operatorname{Re} f=u(x,y)=2x^2$ e $\operatorname{Im} f=v(x,y)=3y^3$,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=4x \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=0 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x}=0 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y}=9y^2$$

e verifica-se facilmente que todas estas funções são contínuas em $\mathbb{R}^2$ (dado que são funções polinomiais). Por outro lado,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \quad , \quad \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad \Leftrightarrow \quad 4x=9y^2$$

pelo que f admite derivada no conjunto

$$\{z=x+iy\in\mathbb{C}\ :\ 4x=9y^2\}$$

Podemos então concluir que o domínio de analiticidade de f é o conjunto vazio, dado que em qualquer vizinhança de um ponto da parábola $4x=9y^2$ existem sempre pontos onde a função não admite derivada.

(c) Calcule o valor de $\int_\gamma \operatorname{sen} z\, dz$ em que γ é qualquer curva simples e regular unindo i a 1.

Dado que a função $\operatorname{sen} z$ é inteira, podemos utilizar o Teorema Fundamental do Cálculo, pelo que

$$\int_\gamma \operatorname{sen} z\, dz = \int_i^1 \operatorname{sen} z\, dz = -\cos z\Big|_i^1 = -\cos 1 + \cos i = -\cos 1 + \cosh 1$$

(d) Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $e^{iz} = -1$

$$e^{iz} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad iz = \log(-1) + 2ki\pi \ , \ k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad iz = \log|-1| + i\pi + 2ki\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

Pelo que as soluções da equação são

$$z = (2k+1)\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

(e) Justifique que a função $f(z) = \dfrac{e^z}{\operatorname{sen} z}$ admite um desenvolvimento em série de Taylor em torno de $z_0 = 1$. Indique a região onde esse desenvolvimento é válido.

(Não necessita de determinar a série)

Por ser o quociente de funções inteiras, f é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{sen} z = 0\}$, isto é, em $\mathbb{C} \setminus \{z = k\pi \, , \, k \in \mathbb{Z}\}$. Em particular, f é analítica em $z_0 = 1$, pelo que o Teorema de Taylor permite concluir que f admite um desenvolvimento em série de Taylor em torno de $z_0 = 1$. Esse desenvolvimento será válido no círculo $|z-1| < R$, em que R é o maior real positivo para o qual f é analítica na região $|z-1| < R$, isto é

$$R = \min\{|1 - k\pi| \, , \, k \in \mathbb{Z}\} = 1$$

2. Considere a função $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $u(x,y) = 3xy^2 - x^3$.

(a) Mostre que u é uma função harmónica em $\mathbb{R}^2$.

Dado que u é uma função polinomial será de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$. Por outro lado,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3y^2 - 3x^2 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 6xy$$

pelo que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -6x \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x$$

Tendo-se

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x + 6x = 0 \ , \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

concluindo-se que u é harmónica em $\mathbb{R}^2$.

(b) Determine uma função $v(x,y)$ de modo a que $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$ seja uma função inteira.

Para que f seja inteira, as condições de Cauchy-Riemann terão que ser verificadas em $\mathbb{R}^2$, o que permite determinar a função $v = \operatorname{Im} f$, harmónica conjugada de u. Assim

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad v(x,y) = \int (3y^2 - 3x^2)\, dy + C(x) = y^3 - 3x^2 y + C(x)$$

Por outro lado

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad 6xy = -(-6xy + C'(x)) \quad \Rightarrow \quad C(x) = C$$

em que C é uma constante real arbitrária. Tem-se então que

$$v(x,y) = \int (3y^2 - 3x^2)\, dy + C \quad , \quad C \in \mathbb{R}$$

3. Obtenha o desenvolvimento em série de potências da função

$$f(z) = \cos(\pi z) + \frac{1}{1+z}$$

válido para

(a) $|z-1| < 2$

Considere-se $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$. Fazendo $w = z - 1$, tem-se que *para qualquer* $z \in \mathbb{C}$

$$f_1(z) = \cos(\pi(w+1)) = -\cos(\pi w) = -\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\pi^{2n} w^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{\pi^{2n}(z-1)^{2n}}{(2n)!}$$

Por outro lado

$$f_2(z) = \frac{1}{2+w} = \frac{1}{2(1+\frac{w}{2})}$$

e, dado que $|z-1| < 2$ (o que implica $|\frac{w}{2}| < 1$)

$$f_2(z) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{w^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}$$

Finalmente, para $|z-1| < 2$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{\pi^{2n}(z-1)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}$$

(b) $|z-1| > 2$

Como já foi referido, $f_1(z) = \cos(\pi z)$ é uma função inteira, pelo que continua a ser válido o desenvolvimento

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{\pi^{2n}(z-1)^{2n}}{(2n)!}$$

Por outro lado

$$f_2(z) = \frac{1}{2+w} = \frac{1}{w(\frac{2}{w}+1)}$$

e, dado que $|z-1| > 2$ (o que implica $|\frac{2}{w}| < 1$)

$$f_2(z) = \frac{1}{w}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n}{w^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n}{(z-1)^{n+1}}$$

Finalmente, para $|z-1| < 2$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{\pi^{2n}(z-1)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n}{(z-1)^{n+1}}$$

4. Determine

$$\oint_C \frac{e^z}{z(z-1)}dz$$

em que:

(a) $C = \{z \,:\, |z+i| + |z+2i| = 2\}$ percorrida uma vez em sentido inverso.

A função $\frac{e^z}{z(z-1)}$ é o quociente de funções inteiras, pelo que é analítica em $\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$. Atendendo a que

$$|0+i| + |0+2i| = |i| + |2i| = 1+2 = 3 > 2$$

e

$$|1+i| + |1+2i| = \sqrt{2} + \sqrt{5} > 2$$

conclui-se que ambas as singularidades da função se encontram na região exterior a C, pelo que existe uma aberto $U \subset \mathbb{C}$ contendo a curva C onde a função é analíitica. Tem-se então, por utilização do Teorema de Cauchy que

$$\oint_C \frac{e^z}{z(z-1)}dz = 0$$

(Note-se que o resultado é independente da orientação da curva.)

(b) $C = \{z \,:\, |z-2| = \frac{3}{2}\}$ percorrida uma vez em sentido directo.

Como na alínea anterior, $\frac{e^z}{z(z-1)}$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$. Atendendo a que

$$|0-2| = 2 > \frac{3}{2}$$

e

$$|1-2| = 1 < 2$$

conclui-se que 0 pertence à regioão exterior a C e 1 pertence à regioão interior a C. Podemos então definir

$$f(z) = \frac{e^z}{z}$$

que é analítica em int$C \cup C$. Por aplicação da Fórmula Integral de Cauchy, conclui-se

$$\oint_C \frac{e^z}{z(z-1)}dz = \oint_C \frac{\frac{e^z}{z}}{z-1}dz 2\pi i f(1) = 2\pi e i$$