Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

2º Teste de Análise Matemática IV

2º Semestre 2003/2004

Cursos: LEEC, LEMat

8 de Maio de 2004, 9h às 10h

INSTRUÇÕES

- **Não abra este caderno de teste** antes de ser anunciado o início da prova.
- Preencha os seus dados nesta folha.
- Apresente e justifique todos os cálculos.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta, incluindo máquinas de calcular.

Pergunta	cotação	classificação
1	6	
2	5	
3	5	
4	4	
Total		

Nome: ______________________________ **Sala:** ____________

Nº: ____________________

Curso: __________________ **Rúbrica (DOCENTE):**

1. Considere

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{4z^2 + 1} + z \operatorname{sen} \frac{1}{(z-i)^2}$$

(a) Indique as singularidades de f e classifique-as.

(b) Calcule $\displaystyle\int_{\gamma_R} f(z)\, dz$, sendo

$$\gamma_R = \{z = Re^{i\theta} \;:\; 0 < \theta < \pi\} \cup \{z = x \;:\; x \in \mathbb{R} \text{ e } |x| \leq R\}$$

com $R > 1$ e γ_R percorrida uma vez em sentido directo.

(c) Utilize o Teorema dos Resíduos, para calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{4x^2+1} dx$$

Sugestão: Poderá utilizar alguns cálculos das alíneas anteriores.

2. Determine as soluções dos seguintes problemas de valor inicial:

(a) $x^3 + (y+1)^2 \dfrac{dy}{dx} = 0 \quad , \quad y(0) = 1$

(b) $x \dfrac{dy}{dx} = 2y + x^3 e^x \quad , \quad y(1) = 0$

3. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x - y^2 + 2xy\,\dfrac{dy}{dx} = 0 \\ \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

(a) Mostre que a equação não é exacta, mas que admite um factor de integração que é função apenas de x. Determine esse factor.

(b) Determine a solução do problema de valor inicial, indicando o seu intervalo máximo de existência.

4. Seja $y_0 \in [0, +\infty[$. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{y} = (\operatorname{sen}(ty) - 2)y^2 \\ \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

(a) Mostre que o problema tem uma única solução, para qualquer $y_0 \in [0, +\infty[$.

(b) Mostre que a solução está definida num intervalo que contém $[0, +\infty[$ e calcule $\lim_{t \to \infty} y(t)$.

(c) Determine a solução do problema de valor inicial quando $y_0 = 0$.