Cálculo Diferencial e Integral II
Lista de exercícios das aulas de revisão para o Teste 2

Teorema da Função Inversa, Teorema da Função Implícita

Teste de Recuperação/Exame – 24/6/2011 – Versão 1

4. Considere a função $F(x,y) = (\operatorname{sen}(x+y), xy)$. Justifique que F é invertível localmente em torno do ponto $(0,\pi)$. Calcule a derivada da função inversa local no ponto $(0,0)$.

Teste 2 – 2/6/2012 – Versão B

2. Mostre que a equação $x^2y + e^{x+y} = 0$ define x como função de y, ou seja $x = g(y)$, numa vizinhança do ponto $(1,-1)$ e calcule $g'(-1)$.

Teste 2 – 7/1/2013 – Versão 3

2. Mostre que o sistema de equações

$$\begin{cases} x \operatorname{sen} y + w = \pi \\ y \operatorname{sen} x + 2x + z + w = 3\pi \end{cases}$$

define as variáveos x e y como funções das variáveis z e w em alguma vizinhança do ponto $(x,y,z,w) = (\frac{\pi}{2}, \pi, 0, \pi)$ e calcule a derivada $\dfrac{\partial x}{\partial z}(0,\pi)$.

Variedades, espaços/rectas/planos tangentes e normais

Teste 1 – 8/11/2008

3. Considere a função $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $F(x,y,z) = (x^3 + x - 3y - 5, y + z^2)$.

(a) Mostre que o conjunto $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : F(x,y,z) = (0,0)\}$ é uma variedade, e determine a sua dimensão.

(b) Determine o espaço normal a M no ponto $(1,-1,1)$ e indique um elemento não-nulo do espaço tangente a M no mesmo ponto.

(c) Justifique que, numa vizinhança do ponto $(1,-1,1)$, a variedade pode ser descrita na forma $x = f_1(y)$ e $z = f_2(y)$, com f_1, f_2 funções de classe C^1, definidas numa vizinhança do ponto $y = -1$. Calcule $f_1'(-1)$ e $f_2'(-1)$.

Exame 1/Teste 2 – 21/6/2010

4. Seja $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(x,y,z) = xy^3 + 2y + x^2z$.

(a) Mostre que a equação $F(x,y,z) = 0$ determina y como função de x e z, de classe C^1, ou seja, $y = g(x,z)$, numa vizinhança de $(-1,-1,1)$, e calcule $Dg(-1,1)$.

(b) Mostre que o conjunto $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : F(x,y,z) = 0\}$ é uma variedade e determine a respectiva dimensão.

(c) Determine uma base para o espaço tangente em $(-1,-1,1)$.

Teste 1 – 9/4/2011 – Versão 2

4. Considere o conjunto $L = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : e^x + e^y + z = 3,\ x - z + 1 = 0\}$.

(a) Mostre que L é uma variedade e indique a sua dimensão.

(b) Mostre que L é o gráfico de uma função $f(y) = (x(y), z(y))$, de classe C^1, numa vizinhança do ponto $(0,0,1)$ e calcule $x'(0)$.

Extremos e multiplicadores de Lagrange

Teste 2 – 2/6/2012 – Versão B

1. Considere o conjunto $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y + 1 = zx\}$.

(a) Mostre que M é uma variedade e calcule a sua dimensão.

(b) Indique um vector tangente a M, não nulo, no ponto $(1,0,1)$.

(c) Determine o ponto de M mais próximo da origem.

Teste 1 – 5/11/2011 – Versão 1

6. Seja M o conjunto definido pelas equações

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x + z = 2 \end{cases} .$$

Determine o ponto de M que apresenta a maior coordenada x.

Teste 1 – 6/11/2012 – Versão 2

4. Mostre que o perímetro do maior rectângulo que pode ser inscrito na elipse $\dfrac{x^2}{c^2} + \dfrac{y^2}{d^2} = 1$, $c, d > 0$, é dado por $4\sqrt{c^2 + d^2}$.

Teste 1 – 9/4/2011 – Versão 2

5. Determine o vector de $\mathbb{R}^3$ cujo comprimento é igual a 3 e cuja soma das componentes é a maior possível.

Integral de um campo escalar numa variedade

Teste 2 – 14/1/2012 – Versão 2A

2. Calcule a massa do fio definido pelas equações $25x^2 + 9y^2 - z^2 = 36$ e $z = 4x$ com densidade de massa dada por $\sigma(x,y,z) = \sqrt{1 + 4y^2}$.

Teste de Recuperação/Exame – 23/6/2012 – Versão A

4. Considere a superfície $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < y < 1, y = 2 - x^2 - z^2\}$. Calcule a massa de S, sabendo que a densidade de massa é dada por $\alpha(x,y,z) = \sqrt{1 + 4x^2 + 4z^2}$.

Trabalho, Teorema de Green

Teste de Recuperação 2 – 12/1/2009
2. Seja
$$h(x,y,z) = \left(y^2, \frac{y}{y^2+z^2} + 2xy, \frac{z}{y^2+z^2}\right) \ .$$
Calcule o trabalho de h ao longo da espiral $\gamma(t) = (e^t, 2\cos t, 2\,\mathrm{sen}\, t)$, $t \in [0, 4\pi]$.

Teste de Recuperação/Exame – 29/1/2011 – Versão 2
2. Considere a curva $C \subset \mathbb{R}^3$ parametrizada por $\alpha(t) = (t, \cos t, \mathrm{sen}\, t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

(a) Calcule o comprimento de C.

(b) Calcule o trabalho do campo vectorial $h(x,y,z) = \left(5, \frac{-3z}{y^2+z^2}, \frac{3y}{y^2+z^2}\right)$ ao longo de C.

Teste 2 – 15/1/2011 – Versão 1
2. Indique, justificando, se cada uma das afirmações seguintes é verdadeira ou falsa:

(a) O campo vectorial $F(x,y) = (x+y, x-y)$ é um campo fechado.

(b) O campo vectorial $F(x,y) = (x+y, x-y)$ é um campo gradiente.

(c) Todo o campo fechado em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ é gradiente.

(d) Todo o campo fechado em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ é gradiente.

Teste de Recuperação/Exame – 23/6/2012 – Versão A
3. Calcule o integral de linha $\oint_T (e^{x^3} - y)dx + (x + \mathrm{sen}(y^2))dy$, onde T é o triângulo de vértices nos pontos $(1,0)$, $(-1,0)$ e $(0,1)$, percorrido no sentido horário.

Teste 2 – 14/1/2012 – Versão 2A
3. Considere os seguintes campos vectoriais
$$F(x,y) = (3x^2 + 2x, 3y^2) \quad , \quad G(x,y) = \left(-\frac{y}{(x+1)^2+y^2}, \frac{x+1}{(x+1)^2+y^2}\right) \ ,$$
e as curvas
$$C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 + y^2 = 1\} \ , \qquad C_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-1)^2 = 1\} \ ,$$
$$C_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1 - x^2, \ 0 < x < 1\} \ , \quad C_4 \text{ é a fronteira de } [-3,3] \times [-3,3] \ .$$

Indique se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas.

(a) $\oint_{C_4} G \cdot dg = 2\pi$, onde C_4 é percorrida no sentido anti-horário.

(b) $\int_{C_3} F \cdot dg = 2\pi$, onde C_3 é percorrida no sentido crescente de x.

(c) $\oint_{C_2} F \cdot dg = 2\pi$, onde C_2 é percorrida no sentido anti-horário.

(d) $\oint_{C_2} G \cdot dg = -2\pi$, onde C_2 é percorrida no sentido horário.

(e) $\oint_{C_1} G \cdot dg = -2\pi$, onde C_1 é percorrida no sentido horário.

Fluxo, Teorema da Divergência, Teorema de Stokes

Teste de Recuperação – 4/1/2008

4. Considere o campo vectorial $F(x, y, z) = (0, xz, 3xzy^2)$ e a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = -x^2 + y^3,\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}\ .$$

Calcule o fluxo de F através de S no sentido da normal n cuja terceira componente é positiva.

Teste 2 – 15/1/2011 – Versão 2

3. Considere o campo vectorial $G(x, y, z) = (-x, -y, 2z)$ e a superfície

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2,\ 0 < z < 1\}\ .$$

Calcule o fluxo de G através de S, segundo a normal com terceira componente positiva, usando:

(a) o Teorema da Divergência;

(b) o Teorema de Stokes.

Exame 1/Teste 2 – 21/6/2010

9. Use o teorema de Stokes para calcular o trabalho realizado pelo campo $F(x, y, z) = (z, y, -x)$ ao longo da linha definida pelas equações $y = 1$, $x^2 + z^2 = 1$ e descrita, uma vez, no sentido anti-horário quando vista do ponto $(0, 10, 0)$.

Teste 2 – 4/6/2011 – Versão B

3. Sejam $F(x, y, z) = (x, y, z + 1)$, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2},\ x > 0,\ z > 0\}$ e seja $n = (n_1, n_2, n_3)$ a normal unitária a S tal que $n_3 > 0$.

(a) Calcule a área de S.

(b) Calcule o fluxo $\iint_S F \cdot n$ pela definição.

(c) Calcule o fluxo $\iint_S F \cdot n$ usando o Teorema da Divergência.

Teste 2 – 7/1/2013 – Versão 3

3. Seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 1 + y^2 + z^2, x < 5\}$ e considere o campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $F(x, y, z) = \Big(\dfrac{e^{2x^2yz} - 1}{\sqrt{1 + z^2}}, 2x^2y, 3xz\Big)$. Calcule o fluxo $\displaystyle\int_S \mathrm{rot}(F) \cdot n$, onde n é a normal unitária com primeira componente negativa.

Teste 2 – 7/1/2013 – Versão 3

4. Considere a superfície $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = 4, y > 0, 0 < x < 2)\}$ e o campo vectorial $F(x, y, z) = (x, 2y - y^2, 2y + 2yz + 1)$. Calcule o fluxo de F através de M num sentido à sua escolha, usando o Teorema da Divergência.