Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste de preparação

1. Considere o sistema
$$\begin{cases} 2ye^{y-1} = t \\ x^2 + y^2 = \cos^2(\frac{\pi}{2}t) + 1. \end{cases}$$
   a) Mostre que este sistema define, numa vizinhança do ponto $(t_0, x_0, y_0) = (2, 1, 1)$, as variáveis x e y como funções de t, de classe C^1.
   b) Calcule $x'(2)$ e $y'(2)$.

2. Considere o conjunto
$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \; ; \; x = y \; ; \; z > 0\}.$$
   a) Mostre que M é uma variedade e determine a respectiva dimensão.
   b) Determine um vector normal a M no ponto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

3. Determine o valor mínimo da função $f(x, y, z) = xy + z^2$ no conjunto definido por
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ y = x. \end{cases}$$

4. Calcule o trabalho do campo vectorial
$$F(x, y) = \left(-\frac{2y}{(x+1)^2 + y^2} - y^3 \, , \, \frac{2x + 2}{(x+1)^2 + y^2} + x^3 + y \right),$$
ao longo da circunferência de raio igual a dois e centro na origem de $\mathbb{R}^2$ e no sentido positivo.

5. Considere a superfície
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 + x^2 = y^2 + z^2 \, ; \, 0 < x < 2\}.$$
orientada com a normal ν que no ponto $(1, 0, \sqrt{2})$ tem terceira componente positiva.
   a) Calcule o fluxo do campo vectorial $F(x, y, z) = (x, y, -z)$ através de S no sentido da normal ν, usando o teorema de Gauss.
   b) Calcule o fluxo do campo vectorial $G(x, y, z) = (-x, -y, 2z)$ através de S no sentido da normal ν, usando o teorema de Stokes.
   c) Calcule o fluxo do rotacional do campo $H(x, y, z) = (-y, x, z)$ através de S no sentido da normal ν.

6. Demonstre o teorema da função inversa usando o teorema da função implícita.