Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Combinatória e Teoria de Códigos

Teste 1 – 10 de Abril de 2014

Duração: 1h 30m

- **Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.**
- **Não é permitido o uso de máquinas calculadoras, telemóveis, nem de outros elementos de consulta.**

1. (3 val.) Determine quantos números inteiros $1 \leq n \leq 7000$ não são divisíveis por 2 ou 3.

2. (3 val.) A menos de equivalência, determine quantos códigos lineares, sobre $\mathbb{F}_3$, de comprimento n e dimensão 1 existem.

3. Seja C o código linear sobre $\mathbb{F}_4 = \mathbb{F}_2[\alpha]$, onde $\alpha^2 = \alpha + 1$, com matriz de paridade

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 0 & 0 & \alpha^2 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} .$$

   (a) (3 val.) Justifique que C corrige todos os erros de peso 1 e descodifique os seguintes vectores recebidos

$$y = (0,0,1,0,\alpha^2,\alpha) \quad \text{e} \quad z = (0,\alpha,0,1,0,0) .$$

   (b) (2 val.) Qual a capacidade de C de correcção de erros de apagamento? Justifique detalhadamente a sua resposta.
   [Sugestão: analise a independência linear das colunas de H.]

   (c) (2 val.) Descodifique, se possível, os seguintes vectores recebidos

$$a = (0,?,?,1,\alpha,0) \quad \text{e} \quad b = (?,?,?,1,1,1) .$$

4. Dado um código binário C de parâmetros (n, M, d), com $d \geq 3$, define-se

$$C_\lambda = \{(x, x+c, \pi(x) + \lambda(c)) \,:\, x \in \mathbb{F}_2^n, c \in C\} ,$$

   onde $\lambda : C \longrightarrow \mathbb{F}_2$ é uma aplicação qualquer e $\pi : \mathbb{F}_2^n \longrightarrow \mathbb{F}_2$ é definido por

$$\pi(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathrm{w}(x) \text{ é par,} \\ 1 & \text{se } \mathrm{w}(x) \text{ é ímpar .} \end{cases}$$

   (a) (3 val.) Determine, justificando, os parâmetros (n', M', d') de C_λ.

   (b) (2 val.) Se C é um código linear, mostre que C_λ é linear se e só se λ é uma aplicação linear.

   (c) (2 val.) Assumindo que C é um código linear com uma matriz geradora G e que λ é uma aplicação linear, determine uma matriz geradora para C_λ.