Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Combinatória e Teoria de Códigos

Teste 1 – 9 de Abril de 2015

Duração: 1h 30m

- **Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.**
- **Não é permitido o uso de máquinas calculadoras, telemóveis, nem de outros elementos de consulta.**

1. Determine quantos números inteiros $1 \leq n \leq 20000$ não têm divisores primos em comum com 20, através dos seguintes métodos:
   (a) (2 val.) usando o Princípio de Inclusão-Exclusão;
   (b) (2 val.) usando a função ϕ de Euler.

2. (2 val.) Seja C um código linear q-ário de comprimento n e dimensão k. Qual o número de matrizes geradoras para C?

3. Seja C o código linear sobre $\mathbb{F}_9 = \mathbb{F}_3[\alpha]$, onde $\alpha^2 = 2\alpha + 1$, com a seguinte matriz de paridade
$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 & \alpha^4 & \alpha^5 & \alpha^6 & \alpha^7 \end{bmatrix}.$$
   (a) (1 val.) Justifique que α é um elemento primitivo de $\mathbb{F}_9$.
   (b) (3 val.) Indique os parâmetros $[n, k, d]$ de C e decida se C é um código perfeito.
   (c) (3 val.) Descodifique os seguintes vectores recebidos
$$y = (0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0) \quad \text{e} \quad z = (0, 1, 0, 0, 1, 1, \alpha, 0)\ .$$
   (d) (1,5 val.) Determine uma base para $C^\perp$ como espaço vectorial sobre $\mathbb{F}_3$.
   (e) (1,5 val.) Recorde que a aplicação traço $\mathrm{Tr} : \mathbb{F}_9 \to \mathbb{F}_3$ é definida por $\mathrm{Tr}(a) = a + a^3$. Determine uma matriz geradora para o código traço $\mathrm{Tr}(C^\perp)$.

4. Considere o código linear C, sobre $\mathbb{F}_3$, com a seguinte matriz geradora
$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$
   Determine, justificando, uma matriz geradora para cada um dos seguintes códigos:
   (a) (2 val.) o pontuado de C na terceira coordenada;
   (b) (2 val.) a extensão por paridade $\widehat{C}$ de C.