Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Combinatória e Teoria de Códigos
2º Teste

11 de Junho de 2011

Duração: 1h 30m

(Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.)

1. (a) (1 val.) Justifique que o polinómio $1 + t + t^2 + t^3 + t^4$ é irredutível em $\mathbb{F}_2[t]$.
   (b) (1 val.) Factorize $t^{10} - 1$ num produto de polinómios irredutíveis em $\mathbb{F}_2[t]$.
   (c) (2,5 val.) Quantos códigos cíclicos, binários, de comprimento 10 existem? Indique quais as dimensões destes códigos.

2. (3 val.) Seja C o código binário cíclico, de comprimento 15, com polinómio gerador
$$g(t) = 1 + t^4 + t^6 + t^7 + t^8 \ .$$
   Sabendo que $\mathrm{d}(C) = 5$, descodifique o vector recebido $y = 000101011110000$ usando o algoritmo caça ao erro.

3. Seja C o código linear sobre $\mathbb{F}_7$, com matriz geradora
$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3^2 & 3^3 & 3^4 & 3^5 \end{bmatrix}$$
   (a) (3 val.) Mostre que C é um código cíclico.
   (b) (3 val.) Determine o polinómio gerador de C.
   (c) (1,5 val.) Justifique que C é um código Reed-Solomon e indique os seus parâmetros $[n, k, d]$.

4. (a) (3 val.) Mostre que o número de blocos num sistema de Steiner $S(t, k, v)$ é $b = \dfrac{\binom{v}{t}}{\binom{k}{t}}$.
   (b) (2 val.) Usando a alínea anterior, determine o número de palavras de peso 7 contidas no código de Golay binário G_{23}.