Fundamentos de Álgebra – 2013/14

Exercícios extra a acrescentar à secção IV.6 da Lista 10 de problemas:

1. Seja D um domínio integral com corpo de fracções $K = \mathrm{Frac}(D)$ e seja M um módulo-D. Seja N o quociente de $M \times (D \setminus \{0\})$ pela seguinte relação de equivalência:

$$(v, d) \sim (v', d') \Leftrightarrow \exists\, d'' \in D \setminus \{0\} \quad d''(dv' - d'v) = 0 \; . \tag{$*$}$$

   Designando a classe de equivalência de (v, d) por $[v, d]$, definem-se as seguintes operações $N \times N \to N$ e $K \times N \to N$:

$$\begin{aligned} [v_1, d_1] + [v_2, d_2] &:= [d_2 v_1 + d_1 v_2, d_1 d_2]; \\ \frac{a}{b}[v_1, d_1] &:= [av_1, bd_1] \; . \end{aligned} \tag{$**$}$$

   onde $v_i \in M$, $d_i \in D \setminus \{0\}$, $\dfrac{a}{b} \in K$. Estas operações estão bem definidas e definem uma estrutura de espaço vectorial sobre K em N.

   (a) Mostre que o núcleo do homomorfismo-D $\varphi : M \to N$ definido por $\varphi(v) = [v, 1]$ é $\mathrm{Torc}M$.

   (b) Mostre que existe um isomorfismo $N \to K \otimes_D M$ que transforma φ no homomorfismo $\phi_{K,M} : M \to K \otimes_D M$; $v \mapsto 1 \otimes v$. Conclua que $\ker \phi_{K,M} = \mathrm{Torc}M$.

2. Seja D um d.i.p. e sejam M_i módulos-D, para $i \in I$. Mostre que

$$M = \bigoplus_{i \in I} M_i \quad \Rightarrow \quad M(p) = \bigoplus_{i \in I} M_i(p) \; .$$

Observações.

(i) A construção do módulo N definida no Exercício 1 pode ser feita para um anel comutativo A qualquer (não necessariamente um domínio integral) e para M um módulo-A, onde $D \setminus \{0\}$ pode ser substituído por um conjunto multiplicativo $S \subset A$, usando a mesma relação de equivalência $(*)$ e as mesmas operações $(**)$. O resultado é um módulo sobre o anel localização $S^{-1}A$, que se pode denotar por $S^{-1}M$.

O caso particular pedido corresponde a tomar $S = D \setminus \{0\}$, que é um subconjunto multiplicativo de D pois D não contém divisores de zero, portanto $S^{-1}D = \mathrm{Frac}(D)$.

(ii) Com a construção "localização de módulos" de (i), obtém-se um functor

$$S^{-1}(-) : \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_{S^{-1}A} \ .$$

Note que a extensão de escalares definida através do produto tensorial $M \mapsto S^{-1}A \otimes_A M$ também define um functor

$$S^{-1}A \otimes_A (-) : \mathrm{Mod}_A \to \mathrm{Mod}_{S^{-1}A} \ ,$$

onde a estrutura de módulo-A para $S^{-1}A$ é induzida pelo homomorfismo de anéis $\varphi_S : A \to S^{-1}A$ definido por $a \mapsto \frac{a}{1}$. Estes dois functores são equivalentes.

No Exercício 1, pede-se para mostrar uma versão um pouco mais fraca desta afirmação, no caso particular de $A = D$ ser um domínio integral e $S = D \setminus \{0\}$.