Fundamentos de Álgebra – 2013/14

Exercício extra a acrescentar à secção III.4 da Lista 5 de problemas:

Um domínio integral D é um domínio de factorização única sse qualquer ideal primo não nulo contém um ideal principal não nulo que é primo.

Sugestão para a demonstração de ($\Leftarrow$): Mostre primeiro as seguintes afirmações.

1. Seja $S = D^\times \cup \{p_1 \cdots p_n \mid n \in \mathbb{N}, p_1 \ldots, p_n \in D \text{ primos}\}$. Então S é um conjunto multiplicativo tal que, se $ab \in S$, então $a \in S$ e $b \in S$.
2. Se $S \subset D$ é um conjunto multiplicativo (com $0 \notin S$), então para qualquer $x \in D$ tal que $(x) \cap S = \varnothing$ existe um ideal primo $P \subset D$ tal que $(x) \subset P$ e $P \cap S = \varnothing$.
   Sugestão: use a caracterização dos ideais primos em $S^{-1}D$.