Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Fundamentos de Álgebra

LMAC e MMA

Teste 1 – 18 de Novembro de 2013

Duração: 1h 30m

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

1. Considere o grupo diedral D_{10} com geradores a de ordem 10 e b de ordem 2 tais que $bab^{-1} = a^{-1}$.
   (a) (1,5 val.) Mostre que $ba^i = a^{-i}b$, para todo o $i \in \mathbb{Z}$. Conclua que $|D_{10}| = 20$.
   (b) (3 val.) Determine os subgrupos de Sylow de D_{10}. (Sugestão: comece por determinar o número de subgrupos-p de Sylow para cada primo p.)
   (c) (1,5 val.) Justifique que não existem grupos simples de ordem 20.

2. Seja G um grupo e $N \lhd G$ um subgrupo normal.
   (a) (1,5 val.) Mostre que $H \lhd G/N$ se e só se $H = K/N$ com $K \lhd G$ e $N < K$.
   (b) (2 val.) Mostre que, se N e G/N são grupos resolúveis, G é resolúvel.
   (c) (1,5 val.) Dê um exemplo de um grupo G e um subgrupo $N \lhd G$ tais que N e G/N são grupos nilpotentes mas G não é nilpotente.

3. (a) (2 val.) Seja D um domínio integral. Mostre que, se $a_0 \in D$ é irredutível em D, então $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ é irredutível em $D[[x]]$.
   (b) (3 val.) Mostre que $\mathbb{R}[[x]]$ é um domínio de ideais principais. (Sugestão: Recorde que $\mathbb{R}[[x]]$ é um anel local e identifique o seu ideal maximal.)

4. Seja CRing a categoria dos anéis comutativos e considere a categoria $\mathcal{C}$ cujos objectos são os pares (A, S), onde $A \in$ CRing e $S \subset A$ é um conjunto multiplicativo, e

$$\hom_{\mathcal{C}}((A,S),(B,R)) := \{f \in \hom_{\mathsf{CRing}}(A,B) \,|\, f(S) \subset R\} \ .$$

   (a) (2 val.) Mostre que $F(A,S) = S^{-1}A$ define um functor $F : \mathcal{C} \to$ CRing.
   (b) (2 val.) Seja $E : \mathcal{C} \to$ CRing o functor de esquecimento definido por $E(A,S) = A$ nos objectos de $\mathcal{C}$. Mostre que os homomorfismos $\varphi_S : A \to S^{-1}A$, $\varphi_S(a) = \frac{a}{1}$, definem uma transformação natural entre os functores E e F.