Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Fundamentos de Álgebra

LMAC e MMA

Teste 2 – 9 de Janeiro de 2014 – Resolução

1. (a) Seja $\mathcal{B} = \{v_i \mid i \in I\}$ uma base de K. Para cada $i \in I$, seja $u_i \in N$ tal que $g(u_i) = v_i$ (exite pois g é sobrejectiva). Seja $r : K \to N$ dada por $r(v_i) = u_i$. A aplicação r está bem definida e induz um homomorfismo de módulos-A, por prolongamento linear, porque $\mathcal{B}$ é uma base de K. Como $g(r(v_i)) = g(u_i) = v_i$, para todo o $i \in I$, e os elementos v_i geram K, temos que $g \circ r = id_K$, logo a sucessão curta exacta do enunciado cinde-se.

   (b) $\mathbb{Z}$ é um módulo-$\mathbb{Z}$ livre de base $\{1\}$. Seja

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0 \ ,$$

   onde π é a projeção canónica, logo π é sobrejectiva, e $f(n) := 2n$, logo f é injectiva e $\mathrm{im}(f) = \langle 2 \rangle = \ker(\pi)$, donde a sucessão acima é exacta. Se a sucessão se cindisse, teriamos $\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$, o que é falso.

2. Como

$$(M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2) \oplus (M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_5) \cong M \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_5) \cong M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{10} \ ,$$

temos que mostrar que $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{10} \cong M/(10 \cdot M)$. Seja $\alpha' : M \times \mathbb{Z}_{10} \to M/(10 \cdot M)$ dada por $\alpha'(v, \underline{n}) = nv + 10 \cdot M$.

(1º) α' está bem definida: $\underline{n} = \underline{m}$ sse $n = m + 10k$ para algum $k \in \mathbb{Z}$, portanto $\alpha'(v, \underline{n}) = nv + 10 \cdot M = mv + 10kv + 10 \cdot M = mv + 10 \cdot M = \alpha'(v, \underline{m})$.

(2º) α' é bilinear (basta verificar a aditividade, pois trata-se de grupos abelianos):

$$\alpha'(v + u, \underline{n}) = n(v + u) + 10 \cdot M = nv + nu + 10 \cdot M = \alpha'(v, \underline{n}) + \alpha'(u, \underline{n}) \ ,$$
$$\alpha'(, \underline{n} + \underline{m}) = (n + m)v + 10 \cdot M = nv + mv + 10 \cdot M = \alpha'(v, \underline{n}) + \alpha'(v, \underline{m}) \ .$$

Portanto, pela propriedade universal do produto tensorial, existe um homomorfismo de grupos abelianos $\alpha : M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{10} \to M/(10 \cdot M)$ tal que $\alpha(v \otimes \underline{n}) = nv + 10 \cdot M$. Queremos ver que α é um isomorfismo. Seja então $\beta : M/(10 \cdot M) \to M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{10}$ a aplicação dada por $\beta(v + 10 \cdot M) = v \otimes \underline{1}$.

β está bem definida: $v + 10 \cdot M = u + 10 \cdot M$ se e só se $v = u + 10w$ para algum $w \in M$, logo

$$\begin{aligned}\beta(v + 10 \cdot M) &= v \otimes \underline{1} = (u + 10w) \otimes \underline{1} = u \otimes \underline{1} + (10w) \otimes \underline{1} \\ &= u \otimes \underline{1} + w \otimes \underline{10} = u \otimes \underline{1} + 0 = \beta(u + 10 \cdot M) \ ;\end{aligned}$$

e β é claramente um homomorfismo de grupos. Como

$$(\beta \circ \alpha)(v \otimes \underline{n}) = \beta(nv + 10 \cdot M) = (nv) \otimes \underline{1} = v \otimes \underline{n}$$

(no último passo usou-se $n \in \mathbb{Z}$) e

$$(\alpha \circ \beta)(v + 10 \cdot M) = \alpha(v \otimes \underline{1}) = v + 10 \cdot M \ ,$$

concluimos que $\beta \circ \alpha = id$ (porque os elementos $v \otimes \underline{n}$ geram $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{10}$) e que $\alpha \circ \beta = id$, donde α é um isomorfismo.

3. Um módulo é projectivo se e só se é um somando directo de um módulo livre. Portanto existem módulos M e N tais que $P \oplus M \cong \bigoplus_{i \in I} A$ e $Q \oplus N \cong \bigoplus_{j \in J} A$. Tomando o produto tensorial termo a termo fica

$$(P \oplus M) \otimes_A (Q \oplus N) \cong \Big(\bigoplus_{i \in I} A\Big) \otimes_A \Big(\bigoplus_{j \in J} A\Big)$$

e usando a distributividade do produto tensorial relativamente à soma directa obtemos

$$(P \otimes_A Q) \oplus (P \otimes_A N) \oplus (M \otimes_A Q) \oplus (M \otimes_A N) \cong \bigoplus_{(i,j) \in I \times J} (A \otimes_A A) \cong \bigoplus_{(i,j) \in I \times J} A \ ,$$

portanto $P \otimes_A Q$ é um somando directo de um módulo livre, logo é projectivo.

4. (a) Como $\operatorname{Torc}(M)$ é um subconjunto do módulo M, basta ver que $\operatorname{Torc}(M)$ é submódulo de M e para isso basta verificar o fecho da soma e do produto por escalares. Sejam $v, u \in \operatorname{Torc}(M)$, sejam $a, b \in D \setminus \{0\}$ tais que $av = 0$ e $bu = 0$, e seja $c \in D$. Então $ab \neq 0$, porque D não contém divisores de zero, e

$$\begin{aligned} ab(u + v) &= a(bu) + b(av) = a0 + b0 = 0 \qquad && \Rightarrow u + v \in \operatorname{Torc}(M) \ , \\ a(cv) &= c(av) = c0 = 0 && \Rightarrow cv \in \operatorname{Torc}(M) \ . \end{aligned}$$

(Usou-se também a comutatividade do produto em D.)

(b) $\operatorname{Torc}(M) \subset \bigoplus_{i \in I} \operatorname{Torc}(M_i)$: Seja $v = (v_i)_{i \in I} \in M = \bigoplus_{i \in I} M_i$. Então existe $a \in D \setminus \{0\}$ tal que $av = 0$. Como

$$av = 0 \Leftrightarrow (av_i)_{i \in I} = 0 \Leftrightarrow \forall_{i \in I} \ av_i = 0 \ ,$$

concluimos que $v_i \in \operatorname{Torc}(M_i)$, para todo o $i \in I$, donde $v \in \bigoplus_{i \in I} \operatorname{Torc}(M_i)$.

$\operatorname{Torc}(M) \supset \bigoplus_{i \in I} \operatorname{Torc}(M_i)$: Seja $v = (v_i)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} \operatorname{Torc}(M_i)$. Então apenas um número finito de v_i é não nulo, i.e., o conjunto $I_0 := \{i \in I \mid v_i \neq 0\}$ é finito, e ainda $v_i \in \operatorname{Torc}(M_i)$ para todo o $i \in I$. Seja então $a_i \in D \setminus \{0\}$ tal que $a_i v_i = 0$, para $i \in I_0$. Como $a_i \neq 0$ e D é um domínio integral, então $a := \prod_{i \in I_0} a_i \neq 0$ (e note que o número de termos é finito). Portanto

$$\forall_{i \in I_0} \ av_i = \Big(\prod_{j \in I_0 \setminus \{i\}} a_j\Big)(a_i v_i) = 0 \qquad \text{e} \qquad \forall_{i \in I \setminus I_0} \ av_i = a0 = 0 \ ,$$

logo $a(v_i)_{i \in I} = 0$ e $v \in \operatorname{Torc}(M)$, pois $a \neq 0$.

(c) Se M é um módulo livre, então $M \cong \bigoplus_{i\in I} D$. Queremos ver que $\mathrm{Torc}(M) = \{0\}$. Pela alínea (b), temos $\mathrm{Torc}(M) \cong \oplus_{i\in I} \mathrm{Torc}(D)$, por isso basta ver que $\mathrm{Torc}(D) = \{0\}$. Mas

$$d \in \mathrm{Torc}(D) \Leftrightarrow \exists_{a\in D\setminus\{0\}}\ ad = 0 \Rightarrow d = 0\ ,$$

pois D não contém divisores de zero, logo D é livre de torção.

[Alternativamente, também se podia provar directamente, sem usar a alínea (b), que $\mathrm{Torc}(M) = \{0\}$, para um módulo livre M, recorrendo a uma base de M.]

5.

$$x - A = \begin{bmatrix} x-3 & 0 & -1 \\ -1 & x-2 & -1 \\ -1 & 0 & x-3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & x-3 \\ -1 & x-2 & -1 \\ x-3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3+(x-3)L_1]{L_2-L_1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & x-3 \\ 0 & x-2 & 2-x \\ 0 & 0 & -1+(x-3)^2 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_3+(x-3)C_1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & x-2 & 2-x \\ 0 & 0 & x^2-6x+8 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-C_1]{C_3+C_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x-2 & 0 \\ 0 & 0 & (x-2)(x-4) \end{bmatrix}$$

Portanto os factores invariantes de $x-A$ são $d_1 = 1$, $d_2 = x-2$ e $d_3 = (x-2)(x-4)$, e a forma canónica de Jordan de A é

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\ ,$$

pois, como módulos-$\mathbb{C}[x]$,

$$\mathbb{C}^3 \cong \frac{\mathbb{C}[x]}{(x-2)} \oplus \frac{\mathbb{C}[x]}{((x-2)(x-4))} \cong \frac{\mathbb{C}[x]}{(x-2)} \oplus \frac{\mathbb{C}[x]}{(x-2)} \oplus \frac{\mathbb{C}[x]}{(x-4)}\ ,$$

onde a multiplicação por x é dada por $x \cdot v := Av$.