Análise Matemática III
1º semestre de 2002/2003

Exercício teste 12 (a entregar na aula prática da semana de 9/12/2002)

Considere a superfície

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + (y-1)^2 = z,\ 0 < z < 2\}$$

e o campo vectorial

$$F(x, y, z) = (x-1, y-1, z).$$

Calcule o fluxo de F através de M, no sentido da normal que tem a terceira componente negativa no ponto $(1, 2, 1)$,

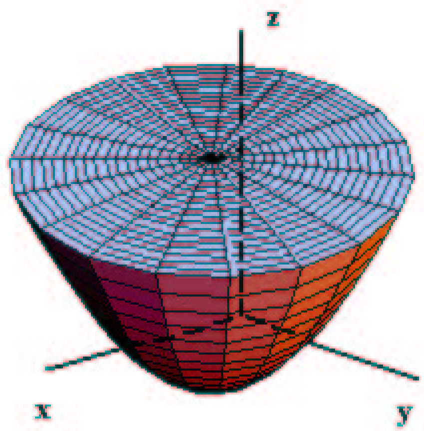
1. pela definição de fluxo.
2. usando o teorema da divergência.

Resolução

1. Em coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z), temos

$$\begin{aligned} x &= 1 + \rho\cos\theta \\ y &= 1 + \rho\sin\theta \\ z &= z \end{aligned}$$

   e M é definida por $\rho^2 = z$ com $0 < \rho < \sqrt{2}$. Portanto M obtém-se a partir de uma parábola rodada em torno da recta vertical dada pelas equações $x = 1, y = 1$, ou seja, M é um parabolóide.



Uma parametrização para M é dada por

$$g(\rho,\theta) = (1+\rho\cos\theta, 1+\rho\sin\theta, \rho^2),\ \ 0<\theta<2\pi,\ \ 0<\rho<\sqrt{2}.$$

Temos

$$\frac{\partial g}{\partial \rho} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ \cos\theta & \sin\theta & 2\rho \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (-2\rho^2\cos\theta, -2\rho^2\sin\theta, \rho).$$

Este vector tem sempre a 3ª componente positiva, portanto é necessário trocar o sinal para calcular o fluxo.

$$\int_M F \cdot n \ dS =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} F(1+\rho\cos\theta, 1+\rho\sin\theta, \rho^2)\cdot(2\rho^2\cos\theta, 2\rho^2\sin\theta, -\rho)\ d\rho d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \rho^2)\cdot(2\rho^2\cos\theta, 2\rho^2\sin\theta, -\rho)\ d\rho d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} \rho^3\ d\rho = 2\pi.$$

2. F é um campo vectorial de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ logo podemos aplicar o teorema da divergência à região

$$D = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x-1)^2+(y-1)^2<z,\ 0<z<2\}.$$

A fronteira de D é formada por M e pelo disco

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2,\ z = 2\}.$$

Uma vez que a normal a M dada é a normal exterior a D, o teorema da divergência diz que

$$\int_D \operatorname{div} F \ dxdydz = \int_M F \cdot n \ dS + \int_S F \cdot (0,0,1) \ dS$$

onde $(0,0,1)$ é a normal exterior ao disco S.

Como $\operatorname{div} F = 3$ conclui-se que

$$\int_M F \cdot n \ dS = 3\text{vol}(D) - \int_S F \cdot (0,0,1) \ dS.$$

Temos

$$\text{vol}(D) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_{\rho^2}^{2} \rho \ dz d\rho d\theta = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} (2\rho - \rho^3) \ d\rho = 2\pi$$

e visto que no disco S o campo F é dado por $F(x, y, z) = (x-1, y-1, 2)$ obtemos

$$\int_S F \cdot (0,0,1) \ dS = \int_S 2 \ dS = 2\text{área}(S) = 2\pi(\sqrt{2})^2 = 4\pi.$$

Podemos assim concluir que

$$\int_M F \cdot n \ dS = 6\pi - 4\pi = 2\pi.$$