Análise Matemática III
1º semestre de 2002/2003

Exercício teste 14:

Mostre que a função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y,z) = \frac{e^{-x^2}}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}$$

é integrável em $\mathbb{R}^3$ e encontre um majorante para $\iiint_{\mathbb{R}^3} f$.

Resolução:

Como a função f é contínua em $\mathbb{R}^3$ e

$$|f(x,y,z)| \leq \frac{1}{(1+x^2+y^2+z^2)^2},$$

para mostrar a integrabilidade de f, basta mostrar que

$$h(x,y,z) = \frac{1}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}$$

é integrável. Para isso vamos utilizar o teorema da convergência monótona. Consideremos então a sucessão de funções $\{h_k\}$ definida por

$$h_k(x,y,z) = \begin{cases} \frac{1}{(1+x^2+y^2+z^2)^2} & \text{se } x^2+y^2+z^2 \leq k^2 \\ 0 & \text{se } x^2+y^2+z^2 > k^2. \end{cases}$$

Cada função h_k é integrável pois é contínua num conjunto compacto ($\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq k^2\}$), e igual a zero fora deste. Além disso, esta sucessão é monótona crescente e converge para h em todo os pontos de $\mathbb{R}^3$. Resta então mostrar que a sucessão $\{\iiint h_k\}$ é limitada. Utilizando coordenadas esféricas

$$g(r,\theta,\phi) = \begin{cases} x &= r\sin\phi\cos\theta \\ y &= r\sin\phi\sin\theta \\ z &= r\cos\phi \end{cases}$$

com $|\det(Dg)| = r^2 \sin\phi$, temos

$$\begin{aligned}
\iiint_{\mathbb{R}^3} h_k &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{k} r^2 \sin\phi \frac{1}{(1+r^2)^2} dr\, d\phi\, d\theta \\
&= 2\pi \int_0^{\pi} \sin\phi \left\{ \int_0^k \frac{r^2}{(1+r^2)^2} dr \right\} d\phi \\
&= 2\pi \int_0^{\pi} \sin\phi \left\{ [-\frac{r}{2(1+r^2)}]_0^k + \frac{1}{2}\int_0^k \frac{1}{1+r^2} dr \right\} d\phi \\
&= 2\pi \int_0^{\pi} \sin\phi \left\{ -\frac{k}{2(1+k^2)} + \frac{1}{2}\arctan k \right\} d\phi \\
&= \pi \left(-\frac{k}{1+k^2} + \arctan k \right) [-\cos\phi]_0^{\pi} \\
&= 2\pi \left(\arctan k - \frac{k}{1+k^2} \right) \leq 2\pi \cdot \frac{\pi}{2} = \pi^2,
\end{aligned}$$

pelo que a sucessão $\{\int\int\int h_k\}$ é limitada. Concluímos então, pelo teorema da convergência monótona, que a função h é integrável em $\mathbb{R}^3$.

Para encontrar um majorante para $\iiint_{\mathbb{R}^3} f$, temos,

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} f \leq \iiint_{\mathbb{R}^3} h.$$

Como, pelo teorema da convergência monótona,

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} h = \lim_{k\to\infty} \iiint_{\mathbb{R}^3} h_k = \lim_{k\to\infty} 2\pi \left(\arctan k - \frac{k}{1+k^2} \right) = 2\pi \cdot \frac{\pi}{2} = \pi^2,$$

concluímos que $\iiint_{\mathbb{R}^3} f \leq \pi^2$.