Análise Matemática III
1º semestre de 2002/2003

Exercício teste 1 (a entregar na aula prática da semana de 23/9/2002)

1) Considere a região $V \subset \mathbb{R}^3$ definida por

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 4 - 2(x^2 + y^2), 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

a) Esboce a região V. Descreva **detalhadamente** as figuras que obtém através da intersecção de V com planos horizontais (i.e. planos de equação $z = const.$).

b) Descreva **detalhadamente** as figuras que obtém através da intersecção de V com planos paralelos ao plano xz (i.e. planos de equação $y = const.$) .

2) Considere a região $A \subset \mathbb{R}^3$ definida por

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0, x + z \leq 1, -x + z \leq 1, y + z \leq 1, -y + z \leq 1\}.$$

a) Esboce a região A. Descreva **detalhadamente** as figuras que obtém através da intersecção de A com planos paralelos ao plano yz (i.e. planos de equação $x = const.$) .

b) Calcule a área da intersecção de A com o plano $x + y = 1$.

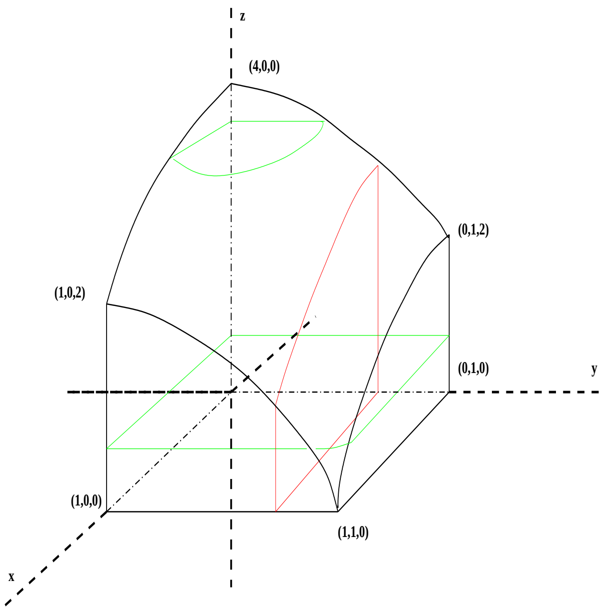
Resolução

1. a) A equação $z = 4 - 2(x^2 + y^2)$ descreve um parabolóide invertido cujo eixo de simetria é o eixo dos z: Esta superfície pode ser obtida por revolução da parábola descrita por $x = 0$ e $z = 4 - 2y^2$ em torno do eixo dos z. A condição $0 \leq z \leq 4 - 2(x^2 + y^2)$ indica que interessa a região entre o parabolóide e o plano coordenado $z = 0$. No entanto, temos também as condições $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$ que indicam que a base do sólido é o quadrado dado por $(x, y, 0)$ com $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$.

Sobre a aresta do quadrado dada por $x = 0, 0 \leq y \leq 1$ temos $0 \leq z \leq 4 - 2y^2$, ou seja, a intersecção do sólido com o plano coordenado $x = 0$ é dada pela região desse plano limitada por $0 \leq y \leq 1$ e $0 \leq z \leq 4 - 2y^2$. Na aresta do quadrado dada por $y = 0$ e $0 \leq x \leq 1$ obtemos o mesmo resultado substituindo y por x.

Sobre a aresta do quadrado dada por $x = 1, 0 \leq y \leq 1$, obtemos $0 \leq z \leq 2 - 2y^2$. Portanto, a intersecção do sólido com o plano $x = 1$ é dada pela região desse plano limitada por $0 \leq y \leq 1$ e por $0 \leq z \leq 2 - 2y^2$. Na aresta do quadrado dada por $y = 1$ e $0 \leq x \leq 1$ obtemos o mesmo resultado substituindo y por x.

O sólido tem a forma na figura seguinte:



Para $2 \leq z \leq 4$ os cortes horizontais de equação $z = const.$ são quartos de disco, com raio $\sqrt{2 - z/2}$. O valor do raio é obtido pondo $z = const.$ na equação do parabolóide e resolvendo para x, y obtendo-se a equação $x^2 + y^2 = 2 - z/2$. Estes cortes estão representados a verde na figura.

Para $0 \leq z < 2$ estes discos começam a sair parcialmente do quadrado e os cortes horizontais para estes valores de z são obtidos pela intersecção do disco de raio $\sqrt{2 - z/2}$ com o quadrado $0 \leq x, y \leq 1$. Estes cortes estão também representados a verde na figura.

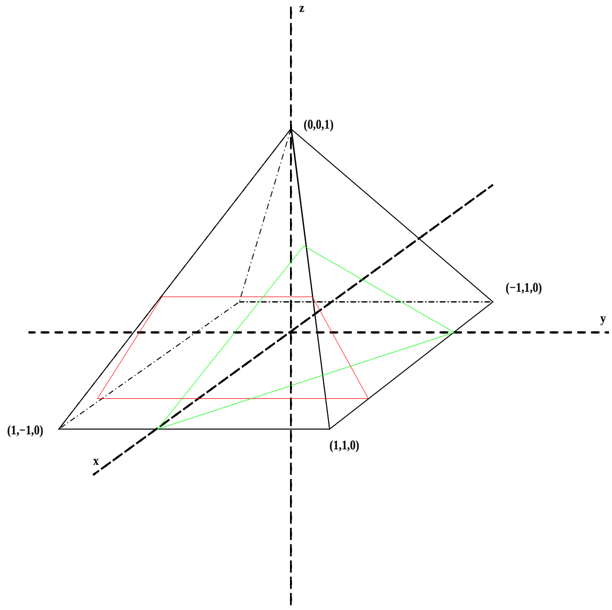
b) Os cortes de equação $y = const.$ estão representados a vermelho na figura. São figuras planas limitadas pelas condiçẽs $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq z \leq 4 - 2y^2 - 2x^2$, com $y = const.$ fixo num valor entre 0 e 1.

2. a) A região é o interior de uma pirâmide quadrangular, de vértices nos pontos $(0,0,1), (1,1,0), (-1,1,0), (-1,-1,0), (1,-1,0)$, como na figura abaixo.

As faces laterais da pirâmide são determinadas pelos planos $x + z = 1, -x + z = 1, y + z = 1, -y + z = 1$. A sua base é o quadrado dado por $|x| \leq 1$ e $|y| \leq 1$.

Os cortes obtidos através de planos de equação $x = const.$ com $0 \leq x \leq 1$, são quadriláteros limitados pelas linhas $x = const.$ e $z = 0$; $x = const.$ e $z = 1 - x$; $x = const.$ e $y + z = 1$; $x = const.$ e $-y + z = 1$, para uma constante entre 0 e 1. Para $-1 \leq x \leq 0$ a resposta é semelhante, apenas aparecendo a equação $z = 1 + x$ em vez de $z = 1 - x$, uma vez que agora o corte intersecta o plano $-x + z = 1$. Estes cortes estão representados a vermelho na figura.

b) Esta intersecção está representada a verde na figura. É constituída pelo triângulo limitado pelas rectas $x + y = 1, z = 0$; $x + z = 1, x + y =$



1; $y+z=1, x+y=1$. Os vértices do triângulo são portanto os pontos $(1/2, 1/2, 1/2)$, $(0, 1, 0)$ e $(1, 0, 0)$. Para calcular a sua área podemos utilizar a fórmula habitual. A base tem comprimento $\sqrt{2}$ a altura é $1/2$, logo a área será $\sqrt{2}/4$.

Em alternativa, podemos descrever a base do triângulo através do segmento de recta $(1, 0, 0)+t(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ com $t \in [0, \sqrt{2}]$. Podemos também observar que as duas arestas superiores deste triângulo vertical são então dadas pelo gráfico da função $z(t)$ com $z(t) = 1 - x(t) = t/\sqrt{2}$, para $t \in [0, \sqrt{2}/2]$ e com $z(t) = 1 - y(t) = 1 - t/\sqrt{2}$, para $t \in [\sqrt{2}/2, \sqrt{2}]$. Logo, a área da figura também pode ser calculada por

$$\int_0^{\sqrt{2}/2} t/\sqrt{2}dt + \int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}} (1 - t/\sqrt{2})dt = 1/2\sqrt{2} = \sqrt{2}/4.$$