

Análise Matemática III

1º semestre de 2002/2003

Proposta de Resolução do Exercício Teste 3

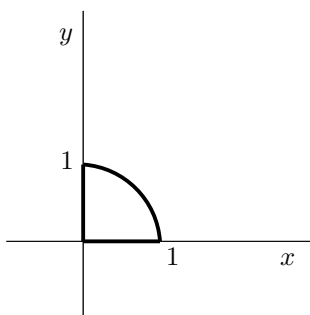
1. Esboce a região de integração e exprima por uma diferente ordem de integração, à sua escolha, o integral

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_{\sqrt{1-x^2-y^2}}^{2-x^2-y^2} f(x, y, z) dz dx dy .$$

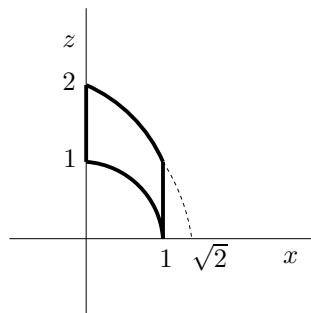
2. Usando integrais iterados com três diferentes ordens de integração à sua escolha, escreva (sem calcular) três expressões para o volume da porção da bola elipsoidal $2x^2 + 2y^2 + z^2 \leq 8$ exterior ao cilindro vertical de raio 1, i.e., pontos satisfazendo também $x^2 + y^2 \geq 1$.

Resolução

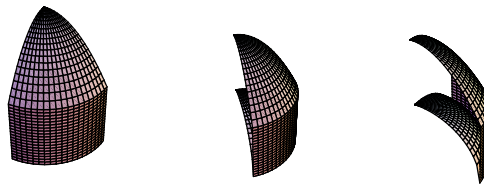
1. A equação $x = \sqrt{1-y^2}$ representa no plano xy metade da circunferência $x^2 + y^2 = 1$. A projecção da região de integração no plano xy , codificada nos limites dos dois integrais exteriores, é pois o quarto de disco dado por $x, y \geq 0$ e $x^2 + y^2 \leq 1$, compreendido entre as linhas a grosso na figura seguinte:



A equação $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ representa o hemisfério norte ($z \geq 0$) da esfera unitária; a equação $z = 2-x^2-y^2$ representa um parabolóide. O corte da região de integração no plano $y = 0$ é a zona definida por $0 \leq x \leq 1$ e $\sqrt{1-x^2} \leq z \leq 2-x^2$, limitada pelas curvas a grosso:



A região de integração é obtida desta superfície no plano xz por revolução de 90° em torno do eixo dos zz . Os troços curvos da fronteira da região de integração estão representados na figura seguinte em três perspectivas; o resto da fronteira é dada por dois pedaços de plano.

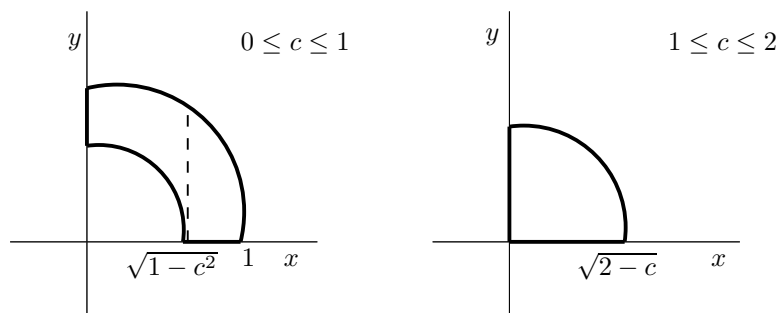


A região é simétrica relativamente ao plano $x = y$ (i.e., ela é invariante por troca das coordenadas x e y). Logo, a partir do integral dado, é simples obter o integral pela ordem de integração $dz dy dx$ (i.e., trocando apenas dx e dy):

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{1-x^2-y^2}}^{2-x^2-y^2} f(x, y, z) dz dy dx .$$

Assim se completa uma possível solução do exercício.

Em alternativa, pode-se considerar os cortes horizontais (i.e., $z = \text{constante}$) para obter os integrais pelas ordens $dx dy dz$ e $dy dx dz$.



Os cortes $z = c$ com $0 \leq c \leq 1$ são quartos de coroa circular (limitados pela esfera e pelo cilindro): $x^2 + y^2 \geq 1 - c^2$ e $x^2 + y^2 \leq 1$, com $x, y \geq 0$. Os cortes $z = c$ com $1 \leq c \leq 2$ são quartos de disco (limitados pelo

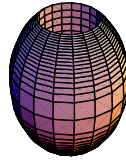
parabolóide): $x^2 + y^2 \leq 2 - z$, com $x, y \geq 0$. Por isso, o integral dado pode ser reescrito, mais complicadamente, como

$$\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-z^2}} \int_{\sqrt{1-z^2-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y, z) dy dx + \int_{\sqrt{1-z^2}}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y, z) dy dx \right) dz + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{2-z}} \int_0^{\sqrt{2-z-x^2}} f(x, y, z) dy dx dz$$

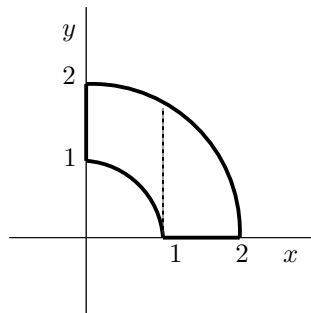
ou, trocando x e y dada a simetria da região,

$$\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-z^2}} \int_{\sqrt{1-z^2-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y, z) dx dy + \int_{\sqrt{1-z^2}}^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y, z) dx dy \right) dz + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{2-z}} \int_0^{\sqrt{2-z-y^2}} f(x, y, z) dx dy dz .$$

2. Por simetria da região (que parece uma missanga), o volume total é oito vezes o volume da porção no primeiro octante.



Seja S a porção da região no primeiro octante. A projecção de S no plano xy é o quarto de coroa circular dado por $x, y \geq 0$ e $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ e representado pela zona limitada pelas curvas a grosso na figura seguinte:



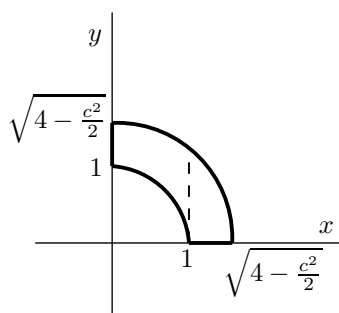
Por invariância da região por troca dos papéis de x e y , obtêm-se logo duas expressões diferentes para o volume pedido:

$$\begin{aligned} \text{Vol} &= 8 \times \left(\int_0^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{8-2x^2-2y^2}} dz dy dx + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{8-2x^2-2y^2}} dz dy dx \right) \\ &= 8 \times \left(\int_0^1 \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_0^{\sqrt{8-2x^2-2y^2}} dz dx dy + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \int_0^{\sqrt{8-2x^2-2y^2}} dz dx dy \right) . \end{aligned}$$

A intersecção do cilindro com o elipsóide (algebricamente dada pela conjunção das equações $x^2 + y^2 = 1$ e $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 8$, a qual implica que $2 + z^2 = 8$) ocorre em $z = \pm\sqrt{6}$. Os cortes horizontais $z = c$ com $0 \leq c \leq \sqrt{6}$ são quartos de coroa circular dados por

$$x, y \geq 0, \quad 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 - \frac{c^2}{2},$$

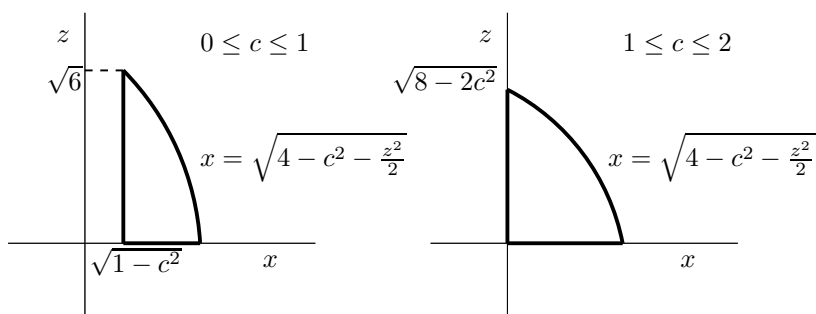
e representados de seguida:



Portanto, outras duas expressões para o volume pedido são:

$$\begin{aligned} \text{Vol} &= 8 \times \int_0^{\sqrt{6}} \left(\int_0^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-\frac{z^2}{2}-x^2}} dy dx + \int_1^{\sqrt{4-\frac{z^2}{2}}} \int_0^{\sqrt{4-\frac{z^2}{2}-x^2}} dy dx \right) dz \\ &= 8 \times \int_0^{\sqrt{6}} \left(\int_0^1 \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-\frac{z^2}{2}-y^2}} dx dy + \int_1^{\sqrt{4-\frac{z^2}{2}}} \int_0^{\sqrt{4-\frac{z^2}{2}-y^2}} dx dy \right) dz . \end{aligned}$$

Finalmente, aplica-se de novo a estratégia dos cortes para obter as duas ordens de integração restantes (talvez aqui as menos convenientes das seis possíveis). O aspecto dos cortes $y = c$ tem dois casos.



Quando $1 \leq c \leq 2$, o corte é o quarto de disco elipsoidal dado por $x, z \geq 0$ e $2x^2 + z^2 \leq 8 - 2c^2$. Quando $0 \leq c \leq 1$, o corte é descrito por $x \geq \sqrt{1 - c^2}$,

$z \geq 0$ e $2x^2 + z^2 \leq 8 - 2c^2$. Os cortes $x = c$ são análogos, trocando os papéis de x e y . Assim, o volume também pode ser dado por

$$\begin{aligned} \text{Vol} &= 8 \times \left(\int_0^1 \int_0^{\sqrt{6}} \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2-\frac{z^2}{2}}} dx dz dy + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{8-2y^2}} \int_0^{\sqrt{4-y^2-\frac{z^2}{2}}} dx dz dy \right) \\ &= 8 \times \left(\int_0^1 \int_0^{\sqrt{6}} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2-\frac{z^2}{2}}} dy dz dx + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{8-2x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-\frac{z^2}{2}}} dy dz dx \right). \end{aligned}$$