Análise Matemática III
1º semestre de 2002/2003

Exercício teste 4 (a entregar na aula prática da semana de 14/10/2002)

1. Esboce a região $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 \leq 4, x^2 + y^2 - 4z^2 \geq 1\}$ e calcule o seu volume.

2. Resolva um dos seguintes exercícios:

   2a. Determine o volume do elipsóide

   $$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x^2 + 2y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

   2b. Seja $R \subset \mathbb{R}^2$ uma região plana, situada no semiplano $x > 0$, com centróide $(\bar{x}, \bar{y})$. Mostre que o volume do sólido de revolução $S \subset \mathbb{R}^3$ que se obtém quando se roda R de 360 graus em torno do eixo Oy é dado por

   $$v(S) = 2\pi\bar{x}A(R),$$

   onde $A(R)$ é a área de R.

Resolução

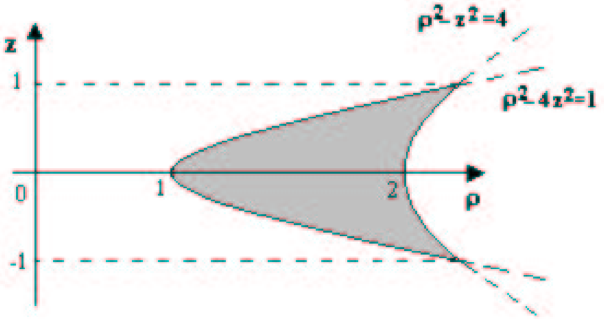
1. Para esboçar a região S observamos que possui simetria axial em relação ao eixo Oz. Assim, é natural tomar uma mudança de coordenadas $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ para coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z):

   $$g^{-1}(S) = \{(\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 : \rho^2 - z^2 \leq 4, \rho^2 - 4z^2 \geq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

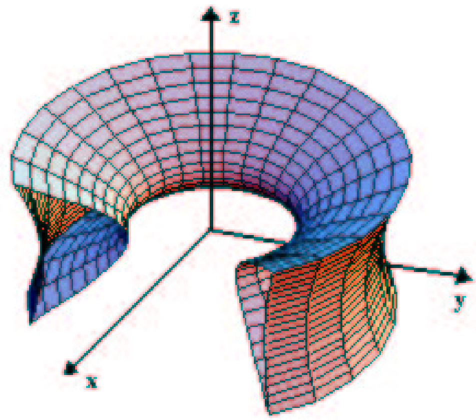
   As curvas $\rho^2 - z^2 = 4$ e $\rho^2 - 4z^2 = 1$ são hipérboles que se intersectam em

   $$4 + z^2 = 1 + 4z^2 \iff z = \pm 1.$$

   No plano (ρ, z) temos então:



A região S é obtida rodando esta região em torno do eixo Oz:



Assim, podemos calcular o volume da região S em coordenadas cilíndricas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} v(S) &= \iiint_S 1\,dx\,dy\,dz \\ &= \int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{1+4z^2}}^{\sqrt{4+z^2}} \rho\,d\rho\,d\theta\,dz \\ &= 3\pi\int_{-1}^{1}(1-z^2)dz = 4\pi. \end{aligned}$$

2.a Usamos uma mudança de coordenadas $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ para coordenadas elipsóidais (r,θ,φ). Estas mais não são que uma simples generalização de coordenadas esféricas:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}} r\,\mathrm{sen}\,(\varphi)\cos(\theta) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} r\,\mathrm{sen}\,(\varphi)\mathrm{sen}\,(\theta) \\ z = r\cos(\varphi) \end{cases}$$

Calculamos o determinante da matriz Jacobiana desta transformação de forma análoga ao de coordenadas esféricas, obtendo:

$$|\det(g'(r,\theta,\varphi))| = \frac{1}{\sqrt{6}} r^2\sin(\varphi).$$

É claro que nestas coordenadas o elipsóide é descrito por:

$$g^{-1}(E) = \{(r,\theta,\varphi) : r = 1,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\varphi\le\pi\}.$$

Assim, o volume do elipsóide é dado por:

$$\begin{aligned} v(E) &= \iiint_E 1\,dx\,dy\,dz \\ &= \iiint_{g^{-1}(E)} \frac{1}{\sqrt{6}} r^2\mathrm{sen}\,(\varphi)\,dr\,d\theta\,d\varphi \\ &= \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{6}} r^2\mathrm{sen}\,(\varphi)\,d\varphi\,d\theta\,dr = \frac{\sqrt{6}}{27}\pi. \end{aligned}$$

2.b) Quando rodamos a figura plana $R \subset \mathbb{R}^2$, situada no semiplano $x > 0$, de 360 graus em torno do eixo Oy, obtemos uma região $S \subset \mathbb{R}^3$ que possui simetria axial em relação ao eixo Oy. Assim, é natural usarmos uma mudança de coordenadas $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ para coordenadas cilíndricas (ρ, θ, y) a fim de calcular o volume de S. Note que o eixo de simetria é Oy e não Oz (como é habitual em coordenadas cilíndricas):

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = y \\ z = \rho \operatorname{sen}(\theta) \end{cases}$$

Em coordenadas cilindricas a região S é descrita por

$$g^{-1}(S) = \{(\rho, \theta, y) : (\rho, y) \in R,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Temos pois que o volume de S é dado por:

$$\begin{aligned} v(S) &= \iiint_S 1\, dx\, dy\, dz \\ &= \iiint_{g^{-1}(E)} \rho\, d\rho\, d\theta\, dy \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\iint_R \rho\, d\rho\, dy \right) d\theta. \end{aligned}$$

Se identificarmos $x = \rho$ o integral duplo pode ser expresso na forma:

$$\iint_R \rho\, d\rho\, dy = A(R) \frac{1}{A(R)} \iint_R x\, dx\, dy = A(R)\bar{x}.$$

onde $A(R)$ é área da região R e $\bar{x}$ é a primeira coordenada do centróide de R. Concluímos então que

$$v(S) = 2\pi \bar{x} A(R),$$

como pretendido.