Análise Matemática III
1º semestre de 2002/2003

1. *(Espiral logarítmica)*
   Considere a espiral logarítmica definida pela parametrização
   $$g(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t), \;\; t \in \mathbb{R}.$$
   Esta curva pode ser decomposta em segmentos de $t{=}2n\pi$ até $t{=}2(n{+}1)\pi$ com $n \in \mathbb{Z}$. Qual a rácio entre o comprimento de um destes segmentos e o comprimento do segmento anterior?

2. *(Curva de Viviani)*
   Considere o cilindro $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + (y - 1/2)^2 = 1/4\}$ e a esfera unitária $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.
   a) Esboce a curva Γ de intersecção destas duas superfícies.
   b) Calcule a massa de um filamento metálico com a configuração de Γ, sabendo que a densidade de massa por unidade de comprimento é $f(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + y}}$.

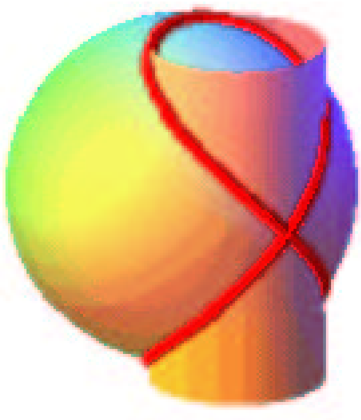
Resolução:

1. O comprimento de um segmento Γ_n de $t = 2n\pi$ até $t = 2(n + 1)\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$ é dado pelo integral de linha
   $$\text{comp}(\Gamma_n) = \int_{\Gamma_n} 1 \, ds = \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} ||g'(t)|| \, dt.$$
   Como $g'(t) = (e^t(\cos t - \sin t), e^t(\sin t + \cos t))$, temos $||g'(t)|| = \sqrt{2}e^t$ e, então,
   $$\begin{aligned} \text{comp}(\Gamma_n) &= \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} \sqrt{2}e^t \, dt = \sqrt{2} \left[e^t\right]_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} = \sqrt{2}(e^{2(n+1)\pi} - e^{2n\pi}) \\ &= \sqrt{2}e^{2n\pi} \left(e^{2\pi} - 1\right). \end{aligned}$$

Assim, a rácio entre o comprimento de um destes segmentos e o segmento anterior é a constante

$$\frac{\text{comp}(\Gamma_n)}{\text{comp}(\Gamma_{n-1})} = \frac{\sqrt{2}e^{2n\pi}(e^{2\pi}-1)}{\sqrt{2}e^{2(n-1)\pi}(e^{2\pi}-1)} = e^{2\pi}.$$

2. a) A curva de intersecção das duas superfícies pode ser observada na figura seguinte:



b) A massa do filamento metálico é dada pelo integral de linha

$$M = \int_\Gamma f\,ds.$$

Para calcular este integral precisamos de determinar uma parametrização para a curva Γ. Como esta curva é a intersecção da esfera com o cilindro temos

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+y^2-y+\frac{1}{4}=\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+y^2=y \end{cases} \Rightarrow y=1-z^2.$$

Utilizando, por exemplo, coordenadas esféricas obtemos

$$\begin{aligned} x &= r\sin\phi\cos\theta \\ y &= r\sin\phi\sin\theta \\ z &= r\cos\phi, \end{aligned}$$

com $0 < \theta, \phi < \pi$. Como sobre a esfera, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1$, temos

$$\begin{aligned} x &= \sin\phi\cos\theta \\ y &= \sin\phi\sin\theta \\ z &= \cos\phi. \end{aligned}$$

Além disso, em cada ponto de Γ temos $y = 1 - z^2$, pelo que

$$\sin\phi\sin\theta = 1 - \cos^2\phi = \sin^2\phi,$$

o que implica que $\sin\theta = \sin\phi$. Consequentemente, como $z^2 = 1 - y$, temos $z^2 = 1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$, pelo que $z = \pm\cos\theta$. Obtemos, então, a parametrização:

$$g(\theta) = \left(\sin\theta\cos\theta, \sin^2\theta, \cos\theta\right), \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

onde se utilizou o facto de que $-\cos\theta = \cos(\pi + \theta)$.

Assim,

$$g'(\theta) = \left(\cos^2\theta - \sin^2\theta, 2\sin\theta\cos\theta, -\sin\theta\right) = \left(\cos 2\theta, \sin 2\theta, -\sin\theta\right),$$

$$||g'(\theta)|| = \sqrt{1 + \sin^2\theta} \quad \text{e}$$

$$f(g(\theta)) = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2\theta}},$$

pelo que a massa do filamento é dada por

$$M = \int_\Gamma f\,ds = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2\theta}} \sqrt{1 + \sin^2\theta}\,d\theta = \int_0^{2\pi} 1\,d\theta = 2\pi.$$

Nota: Alternativamente, poderíamos ter obtido a mesma parametrização utilizando coordenadas cilíndricas

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\theta \\ y &= \rho\sin\theta \\ z &= z. \end{aligned}$$

Como em Γ, $x^2 + y^2 = y$, temos $\rho^2 = y = \rho\sin\theta$, o que implica que $\rho = \sin\theta$. Então, $z^2 = 1 - y = 1 - \sin^2\theta$ e obtemos novamente a parametrização:

$$g(\theta) = \left(\sin\theta\cos\theta, \sin\theta^2, \cos\theta\right), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Uma outra parametrização poderia ser obtida da seguinte forma: Como a projecção da curva Γ no plano xy é simplesmente a circunferência de centro $(0, \frac{1}{2})$ e raio $\frac{1}{2}$ dada pelas equações: $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ e $z = 0$, podemos pensar em coordenadas cilíndricas relativamente ao eixo do cilindro. Podemos, então, parametrizar a curva de projecção com um ângulo polar $\theta \in [0, 2\pi]$:

$$(x(\theta), (y(\theta)) = \left(\frac{1}{2} \cos\theta, \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin\theta \right) \ ,$$

e depois usar a expressão $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ para obter uma parametrização da metade de Γ no hemisfério norte:

$$g(\theta) = \left(\underbrace{\frac{1}{2} \cos\theta}_{x(\theta)}, \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin\theta}_{y(\theta)}, \underbrace{\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin\theta}}_{\sqrt{1 - x(\theta)^2 - y(\theta)^2}} \right) \ , \ \theta \in [0, 2\pi] \ .$$

Para esta parametrização tem-se

$$\begin{aligned} g'(\theta) &= \left(-\tfrac{1}{2} \sin\theta, \tfrac{1}{2} \cos\theta, \tfrac{-\cos\theta}{4\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin\theta}} \right) \\ ||g'(\theta)|| &= \sqrt{\tfrac{3+\sin\theta}{8}} \qquad \text{e} \\ f(g(\theta)) &= \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sin\theta}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3+\sin\theta}{2}}} \ . \end{aligned}$$

Por simetria do filamento, a massa da porção no hemisfério norte é metade da massa total. A massa dessa porção é

$$\frac{M}{2} = \int_{\Gamma \cap \{z \geq 0\}} f = \int_0^{2\pi} f(g(\theta)) ||g'(\theta)|| \, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{\frac{3+\sin\theta}{8}}}{\sqrt{\frac{3+\sin\theta}{2}}} \, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \, d\theta = \pi.$$

Logo a massa total é $M = 2\pi$.