Análise Matemática III
1º semestre de 2002/2003

Exercício teste 6: (a entregar na semana de 28/10/2002)

Uma partícula pontual de carga eléctrica $q = 3$ está mergulhada num campo eléctrico dado pela expressão [1]

$$E(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^3\,(x,y,z)+\left(\frac{-y}{(x-1)^2+y^2},\frac{(x-1)}{(x-1)^2+y^2},0\right)+(-y,x,e^z)\,.$$

A partícula foi obrigada a percorrer um circuito composto por três curvas C_1, C_2, C_3 definidas por:

$$C_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + y^2 = 1, z = 3\},$$

$$C_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + (y-1)^2 = 1, z = 3\},$$

$$C_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0, 3 \leq z \leq 4\}.$$

1) Sabendo que a partícula percorreu C_1 e C_2 no sentido anti-horário (do ponto de vista de um observador colocado no ponto $(0,0,10)$) e C_3 no sentido ascendente, calcule o trabalho que a força eléctrica $f_{ele} = q \cdot E$ realizou sobre ela.

2) Será o campo E um gradiente no seu domínio ?

Sugestão: Tente entender a estrutura do campo vectorial E decompondo-o em campos mais simples. Não tente fazer as contas todas directamente pela definição. Se quiser utilize directamente o teorema de Green no plano nalguns passos, embora tal não seja estritamente necessário.

Resolução:

[1] Na verdade, para que este E satisfizesse as equações de Maxwell do electromagnetismo, seria também necessária a presença de um campo magnético variável no tempo; esse campo também actuaria sobre a partícula mas sem realizar trabalho, uma vez que a força magnética $f_{mag} = qv \times B$ é sempre perpendicular às trajectórias, como certamente aprendeu em electromagnetismo.

1) Seguindo a sugestão vamos decompor o campo vectorial E na forma $E = E_1 + E_2 + E_3 + E_4$ com

$$E_1 = (x^2+y^2+z^2)^3\,(x,y,z)\,,\ E_2 = \left(\frac{-y}{(x-1)^2+y^2}, \frac{(x-1)}{(x-1)^2+y^2}, 0\right),$$

$$E_3 = (-y, x, 0)\,,\ E_4 = (0,0,e^z)\,.$$

Temos então que o trabalho da força eléctrica será,

$$W = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}\int_{C_i} qE_j = 3\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}\int_{C_i} E_j.$$

Vamos analisar o trabalho de cada um dos E_j ao longo dos C_i.

O campo E_1 é radial, ou seja $E_1(x,y,z)$ é da forma $g(r)(x,y,z)$, com $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ e $g(r) = r^6$. É fácil de verificar que $\partial_x(E_1)_y - \partial_y(E_1)_x = 0$, $\partial_x(E_1)_z - \partial_z(E_1)_x = 0$ e $\partial_y(E_1)_z - \partial_z(E_1)_y = 0$, pelo que E_1 é um campo fechado. É também um campo de classe C^1 com domínio em $\mathbb{R}^3$. Logo, é um gradiente e existe um potencial ϕ tal que $E_1 = \nabla\phi$. O potencial ϕ é único a menos de uma constante aditiva e teremos $\partial_x\phi = g(r)x$ e analogamente para as derivadas em y, z. Observando que $\partial_x r = x/r$, obtemos $d\phi/dr = rg(r) = r^7$ e podemos tomar $\phi(x,y,z) = r^8/8$.

O trabalho de E_1 ao longo de C_1 e de C_2 será zero porque o trabalho de campos gradientes ao longo de caminhos fechados é nulo. Quanto a C_3, aplicando o teorema fundamental do cálculo,

$$\int_{C_3} E_1 = \phi(0,0,4) - \phi(0,0,3) = \frac{1}{8}(4^8 - 3^8).$$

É fácil de verificar que E_2 é também um campo fechado. No entanto, o seu domínio é $\mathbb{R}^3\backslash\{\text{eixo } x=1, y=0\}$ que não é simplesmente conexo. A curva C_1 dá a volta ao eixo definido por $x=1, y=0$ pelo que não podemos garantir que $\oint_{C_1} E_2 = 0$ De facto, parametrizando C_1 com $h(\theta) = (1+\cos(\theta), \text{sen}\,(\theta), 0)$, $\theta \in [0, 2\pi]$,

$$\oint_{C_1} E_2 = \int_0^{2\pi} (-\text{sen}\,(\theta), 1+\cos(\theta), 0)\cdot h'(\theta)d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} (-\text{sen}\,(\theta), 1+\cos(\theta), 0)\cdot(-\text{sen}\,(\theta), \cos(\theta), 0)d\theta = 2\pi \neq 0,$$

onde se utilizou que $\int_0^{2\pi} \cos(\theta) d\theta = 0$.

Logo, E_2 não é um gradiente no seu domínio. Por outro lado, a curva fechada C_2 não dá a volta ao eixo dos z, ou seja, no domínio de E_2 ela é homotópica a um ponto. Uma vez que E_2 é um campo fechado temos de imediato $\oint_{C_2} E_2 = 0$.

A curva C_3 é vertical. A componente z do campo E_2 é nula. Logo, $\int_{C_3} E_2 = 0$. O mesmo argumento indica que também $\int_{C_3} E_3 = 0$.

O campo E_3 não é fechado porque $\partial_x(E_3)_y - \partial_y(E_3)_x = 2 \neq 0$. Uma vez que as curvas fechadas C_1 e C_2 são horizontais assim como o campo E_3, para calcularmos $\oint_{C_1} E_3$ e $\oint_{C_2} E_3$ vamos aplicar o teorema de Green no plano, restringindo-nos ao plano horizontal $z = 3$ e ignorando as componentes em z (que são nulas). Temos, pelo teorema de Green, e uma vez que o domínio de E_3 é $\mathbb{R}^3$,

$$\oint_{C_1} E_3 = \int\int_{int\ C_1} (\partial_x(E_3)_y - \partial_y(E_3)_x) dxdy = \int\int_{int\ C_1} 2dxdy = 2(area\ int.\ C_1) = 2\pi.$$

Do mesmo modo obtemos $\oint_{C_1} E_3 = 2\pi$.

Finalmente, consideramos o campo E_4. O seu domínio é $\mathbb{R}^3$, é um campo fechado e é portanto um gradiente com $E_4 = \nabla\varphi$ para um campo escalar φ. Escolhendo (a menos de cosntante aditiva) $\varphi(x, y, z) = e^z$, temos

$$\int_{C_3} E_4 = \varphi(0, 0, 4) - \varphi(0, 0, 3) = e^4 - e^3.$$

Por outro lado, mais uma vez, as curvas C_1, C_2 são horizontais e E_4 é um campo vertical, pelo que $\oint_{C_1} E_4 = \oint_{C_2} E_4 = 0$.

Somando todas as contribuições e multiplicando pela carga eléctrica $q = 3$ obtemos o trabalho da força eléctrica

$$W = 3 \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} \int_{C_i} E_j = 3(\frac{1}{8}(4^8 - 3^8) + 2\pi + 2\pi + 2\pi + e^4 - e^3).$$

Este trabalho é positivo e podemos portanto concluir que a energia cinética da partícula aumentou durante o percurso.

2) Temos, por exemplo, que $\oint_{C_1} E = \oint_{C_1} (E_2 + E_3) = 4\pi \neq 0$. Logo, E não é um gradiente.