

## Análise Matemática III 1º semestre de 2002/2003

### Proposta de Resolução do Exercício Teste 7

1. Calcule  $\int_C P dx + Q dy$  onde  $P(x, y) = ye^x + 7 - y^2 + 2xy^3$ ,  $Q(x, y) = e^x + \sin y + 3x^2y^2$  e  $C$  é o quadrado de vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$  e  $(0, 1)$  percorrido no sentido directo.
2. Seja  $R$  uma região em  $\mathbb{R}^2$  com fronteira uma curva regular  $C$ . Seja  $g(t) = (X(t), Y(t))$ ,  $a \leq t \leq b$ , uma parametrização de  $C$ . Demonstre a seguinte fórmula para a área:

$$\text{Área}(R) = \frac{1}{2} \int_C -y dx + x dy = \frac{1}{2} \int_a^b \det \begin{bmatrix} X(t) & Y(t) \\ X'(t) & Y'(t) \end{bmatrix} dt .$$

### Resolução

1. O campo vectorial  $(P, Q)$  em  $\mathbb{R}^2$  é de classe  $C^1$  e a curva  $C$  é seccionalmente regular, fechada e simples. Seja  $S$  a região quadrada limitada por  $C$ . Pelo teorema de Green,

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_S \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy .$$

Ora,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = e^x + 6xy^2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = e^x - 2y + 6xy^2 ,$$

pelo que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2y .$$

Assim o integral pedido é

$$\begin{aligned} \int_C P dx + Q dy &= \iint_S 2y dx dy \\ &= 2 \times (\text{coordenada } y \text{ do centróide de } S) \times (\text{área de } S) \\ &= 2 \times \frac{1}{2} \times 1 \\ &= 1 . \end{aligned}$$

2. Com  $P(x, y) = -y$  e  $Q(x, y) = x$ , tem-se

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - (-1) = 2 .$$

Pelo teorema de Green, obtém-se

$$\frac{1}{2} \int_C -y dx + x dy = \frac{1}{2} \iint_R 2 dx dy = \iint_R 1 dx dy = \text{Área}(R) .$$

Pela definição de integral de linha de um campo escalar,

$$\frac{1}{2} \int_C -y dx + x dy = \frac{1}{2} \int_a^b (-Y(t)X'(t) + X(t)Y'(t)) dt = \frac{1}{2} \int_a^b \det \begin{bmatrix} X(t) & Y(t) \\ X'(t) & Y'(t) \end{bmatrix} dt .$$