Análise Matemática III
1º semestre de 2004/2005

Exercício teste 2 (a entregar na aula prática da semana de 27/9/2003)

1) Mostre que a fronteira ∂S do conjunto
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < 2 - x^2 - y^2\}$$
tem medida nula em $\mathbb{R}^3$.

2) Para o intervalo $I =]0,3[\times]0,3[\subset \mathbb{R}^2$, considere a função em escada $s : I \to \mathbb{R}$ definida por
$$s(x,y) = \begin{cases} \sqrt{3} & 0 < x \leq 1,\ 0 < y \leq 2 \\ 1 & 1 < x < 2,\ 0 < y \leq 2 \\ 4 & 2 < x < 3,\ 0 < y \leq 2 \\ \sin y & x = 2,\ 0 < y < 3 \\ 7 & 0 < x \leq 1,\ 2 < y < 3 \\ \pi & 1 < x < 2,\ 2 < y < 3 \\ -2 & 2 < x < 3,\ 2 < y < 3. \end{cases}$$
Calcule $\int_I s$.

Resolução

1) A fronteira do conjunto S é dada por $\partial S = S_1 \cup S_2$ onde
$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0,\ x^2 + y^2 \leq 2\}$$
e
$$S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2 - x^2 - y^2,\ 0 \leq z\}.$$
Cada um destes conjuntos tem medida nula em $\mathbb{R}^3$.

Com efeito, S_1 é um subconjunto do gráfico da função contínua $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f_1(x,y) = 0$, pelo que também tem medida nula.

Do mesmo modo, S_2 é um subconjunto do gráfico da função contínua $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f_2(x,y) = 2 - x^2 - y^2$ pelo que tem medida nula.

Assim, como a união de dois conjuntos com medida nula tem ainda medida nula, conclui-se que ∂S tem medida nula.

2) Considere-se a partição do intervalo $I =]0,3[\times]0,3[$ nos subintervalos I_j ($j = 1,2,3,4,5,6$) em que
$$\begin{aligned} I_1 &=]0,1[\times]0,2[\\ I_2 &=]1,2[\times]0,2[\\ I_3 &=]2,3[\times]0,2[\\ I_4 &=]0,1[\times]2,3[\\ I_5 &=]1,2[\times]2,3[\\ I_6 &=]2,3[\times]2,3[. \end{aligned}$$

Considere-se também o conjunto dos valores da função s em cada um destes subintervalos, $\{s_j : j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, em que

$$
\begin{aligned}
s_1 &= \sqrt{3} \\
s_2 &= 1 \\
s_3 &= 4 \\
s_4 &= 7 \\
s_5 &= \pi \\
s_6 &= -2.
\end{aligned}
$$

Assim, temos $s(x, y) = s_j$ para $(x, y) \in I_j$, pelo que o integral de s é dado por

$$\int_I s = \sum_{j=1}^{6} s_j \; vol(I_j) = \sqrt{3}\times 2+1\times 2+4\times 2+7\times 1+\pi\times 1-2\times 1 = 2\sqrt{3}+\pi+15.$$

Note que para o cálculo do integral não são relevantes os valores que s toma nas fronteiras dos intervalos I_j.