Análise Matemática III

1º semestre de 2005/2006

Exercício Teste 10 (a entregar na semana de 28/11/2005)

1. Considere a circunferência $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$. Para um ponto $\mathbf{v} = (p, q) \in S$ e $c \in \mathbb{R}$, designa-se por $R_{\mathbf{v},c}$ a recta $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, px + qy = c\}$. Use o método dos multiplicadores de Lagrange para calcular a distância mínima entre S e $R_{\mathbf{v},c}$, em que $|c| > 1$.

   Sugestão: Considere a função $f(u, v, x, y) = (u - x)^2 + (v - y)^2$ onde $(u, v) \in S$ e $(x, y) \in R_{\mathbf{v},c}$.

Resolução:

1. Seja $\mathbf{v} = (p, q) \in S$, e considere a função $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$F(u, v, x, y) = (u^2 + v^2 - 1, px + qy - c).$$

A função F é de classe $\mathcal{C}^\infty$ e

$$DF(u, v, x, y) = \begin{bmatrix} 2u & 2v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & q \end{bmatrix}$$

tem característica 2 quando $(u, v) \neq (0, 0)$. Logo, o conjunto de nível

$$\begin{aligned} M &:= \{(u, v, x, y) \in \mathbb{R}^4 : F(u, v, x, y) = (0, 0)\} \\ &= \{(u, v, x, y) \in \mathbb{R}^4 : u^2 + v^2 = 1,\ px + qy = c\} = S \times R_{\mathbf{v},c} \end{aligned}$$

é uma variedade de dimensão 2 em $\mathbb{R}^4$ (os pontos da forma $(0, 0, x, y)$ não pertencem a M).

O problema pode então ser visto como a determinação do mínimo da função $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(u, v, x, y) = (u - x)^2 + (v - y)^2$$

no conjunto M.

Note que o mínimo de f em $M = S \times R_{\mathbf{v},c}$ existe pois existe um ponto da circunferência S (conjunto compacto) onde a distância a $R_{\mathbf{v},c}$ é mínima.

Os extremos de f são então dados pelo método dos multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{cases} D(f + \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2)(u, v, x, y) = 0 \\ F_1(u, v, x, y) = 0 \\ F_2(u, v, x, y) = 0 \end{cases}$$

onde $F_1, F_2 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ são as funções coordenadas de F, ou seja,

$$\begin{cases} D((u - x)^2 + (v - y)^2 + \lambda_1(u^2 + v^2 - 1) + \lambda_2(px + qy - c)) = 0 \\ u^2 + v^2 = 1 \\ px + qy = c \end{cases}$$

Então,

$$\begin{cases} 2(u - x) + 2u\lambda_1 = 0 \\ 2(v - y) + 2v\lambda_1 = 0 \\ -2(u - x) + p\lambda_2 = 0 \\ -2(v - y) + q\lambda_2 = 0 \\ u^2 + v^2 = 1 \\ px + qy = c. \end{cases}$$

Das primeiras duas equações temos

$$\begin{cases} u - x = -u\lambda_1 \\ v - y = -v\lambda_1, \end{cases}$$

pelo que, substituindo na terceira e na quarta equações, obtemos:

$$\begin{cases} 2u\lambda_1 + p\lambda_2 = 0 \\ 2v\lambda_1 + q\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

e então $uq\lambda_1 = vp\lambda_1$. Conclui-se assim que, ou $\lambda_1 = 0$, ou $uq = vp$. No primeiro caso temos

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ u - x = v - y = 0 \\ \lambda_2 = 0, \end{cases}$$

o que é impossível pois, como $|c| > 1$, $S \cap R_{\mathbf{v},c} = \emptyset$ e então $(u,v) \neq (x,y)$. Ficamos então com $uq = vp$. Como $u^2 + v^2 = 1$, temos $q^2u^2 + q^2v^2 = q^2$, isto é, $v^2p^2 + q^2v^2 = q^2$, o que implica que $v^2(p^2 + q^2) = q^2$. Por outro lado, $p^2 + q^2 = 1$, pelo que $v = \pm q$. Assim temos,

$$\begin{cases} v = q \\ u = p \\ -2(p - x) + p\lambda_2 = 0 \\ -2(q - y) + q\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} v = -q \\ u = -p \\ -2(-p - x) + p\lambda_2 = 0 \\ -2(-q - y) + q\lambda_2 = 0. \end{cases}$$

No primeiro caso temos $(p - x)q = p(q - y)$ ou seja $xq = py$. Como, por outro lado, $px + qy = c$, temos $(p^2 + q^2)y = cq$, e então $y = cq$ e $x = cp$.

No segundo caso temos $(p + x)q = p(q + y)$ pelo que novamente $y = cq$ e $x = cp$.

Assim, as soluções do sistema inicial são:

$$(p, q, cp, cq) \quad \text{e} \quad (-p, -q, cp, cq).$$

Como sabemos que o mínimo da função f existe e

$$f(p, q, cp, cq) = p^2(1 - c)^2 + q^2(1 - c)^2 = (1 - c)^2$$
$$f(-p, -q, cp, cq) = p^2(1 + c)^2 + q^2(1 + c)^2 = (1 + c)^2,$$

concluímos que o mínimo de f é $(c - 1)^2$, se $c > 1$, e $(c + 1)^2$ se $c < -1$. A distância minima entre S e $R_{\mathbf{v},c}$ é então $c - 1$ se $c > 1$, ou $-c - 1$ se $c < -1$.