Análise Matemática III
1º semestre de 2005/2006

Exercício teste 11 (a entregar na aula prática da semana de 5/12/2005)

Considere a superfície

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4,\ z > 2\}$$

e o campo vectorial

$$F(x, y, z) = (x, 0, -z).$$

Calcule o fluxo de F através de M, segundo a normal unitária n com terceira componente negativa

1. pela definição de fluxo;
2. usando o teorema da divergência.
3. usando o teorema de Stokes.

Resolução

1. Em coordenadas esféricas (r, θ, ϕ), temos

$$\begin{aligned} x &= r \sin\phi \cos\theta \\ y &= r \sin\phi \sin\theta \\ z &= 2 + r \cos\phi \end{aligned}$$

e M é definida por $r = 2$ com $0 < \phi < \pi/2$ e $0 < \theta < 2\pi$ (M é o hemisfério norte da superfície esférica de raio 2 centrada no ponto $(0, 0, 2)$). Uma parametrização para M é então dada por

$$g(\theta, \phi) = (2 \sin\phi \cos\theta, 2 \sin\phi \sin\theta, 2 + 2 \cos\phi),$$

com $\theta \in]0, 2\pi[$ e $\phi \in]0, \pi/2[$. Note que a imagem desta parametrização é $M \setminus C$ onde $C = \{(x, y, z) \in M : y = 0 \quad \text{e} \quad x \geq 0\}$ tem medida nula.

Temos

$$D_1\, g \times D_2\, g = \frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial \phi} = \begin{vmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ -2\sin\phi \sin\theta & 2\sin\phi\cos\theta & 0 \\ 2\cos\phi\cos\theta & 2\cos\phi\sin\theta & -2\sin\phi \end{vmatrix}$$

$$= (-4\sin^2\phi\cos\theta, -4\sin^2\phi\sin\theta, -4\sin\phi\cos\phi).$$

Note que a 3ª componente deste vector é sempre negativa ($0 < \phi < \pi/2$), pelo que ele tem o sentido pretendido. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_M F\cdot n\; dS &= \int_{M\backslash C} F\cdot n\; dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} F(g(\theta,\phi))\cdot(D_1\, g\times D_2\, g)\, d\phi\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} F(2\sin\phi\cos\theta, 2\sin\phi\sin\theta, 2+2\cos\phi)\cdot \\
&\quad \cdot(-4\sin^2\phi\cos\theta, -4\sin^2\phi\sin\theta, -4\sin\phi\cos\phi)\quad d\phi\, d\theta \\
&= -8\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \sin^3\phi\,\cos^2\theta - \sin\phi\cos\phi - \sin\phi\cos^2\phi\quad d\phi\, d\theta = \\
&= -8\left\{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\sin\phi\,(1-\cos^2\phi)\cos^2\theta\, d\phi\, d\theta\; - 2\pi\,[\frac{\sin^2\phi}{2}]_0^{\pi/2} + 2\pi[\frac{\cos^3\phi}{3}]_0^{\pi/2}\right\} \\
&= -8\left\{\int_0^{2\pi}\left([-\cos\phi]_0^{\pi/2} + [\frac{\cos^3\phi}{3}]_0^{\pi/2}\right)\cos^2\theta\, d\theta - \pi - \frac{2\pi}{3}\right\} \\
&= -8\left\{\int_0^{2\pi}\frac{2}{3}\cos^2\theta\, d\theta - \pi - \frac{2\pi}{3}\right\} = 8\pi.
\end{aligned}$$

2. F é um campo vectorial de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ pelo que podemos aplicar o teorema da divergência à região

$$D = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+(z-2)^2 < 4,\; z > 2\}.$$

A fronteira de D é formada por M e pelo disco

$$B = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le 4,\;\; z = 2\}.$$

O teorema da divergência diz então que

$$\iiint_D \operatorname{div} F\; dxdydz = \int_M F\cdot n_{\text{ext}}\; dS + \int_B F\cdot(0,0,-1)\; dS$$

onde n_{ext} é a normal unitária exterior a D em M, e $(0,0,-1)$ é a normal unitária exterior a D em B.

Como $\operatorname{div} F = 0$ conclui-se que

$$\begin{aligned}
\int_M F\cdot n_{\text{ext}}\; dS &= -\int_B F\cdot(0,0,-1)\; dS = -\int_B z\, dS = -\int_B 2\, dS = \\
&= -2\,\text{área}(B) = -2\pi(2)^2 = -8\pi,
\end{aligned}$$

pois $z = 2$ em B. Podemos assim concluir que

$$\int_M F\cdot n\; dS = 8\pi,$$

uma vez que n_{ext} e n têm sentidos contrários.

3. Como F é um campo vectorial em $\mathbb{R}^3$ com divergência nula e $\mathbb{R}^3$ é um conjunto em estrela, sabemos que existe um campo vectorial A tal que $F = \text{rot } A$. Temos então que $A = (A_1, A_2, A_3)$ satisfaz o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = x \\ \\ \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} = 0 \\ \\ \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = -z. \end{cases}$$

A solução deste sistema não é única. Para encontrar uma solução particular, podemos procurar, por exemplo, uma solução que satisfaça $A_2 = 0$. Obtemos assim,

$$\begin{cases} \frac{\partial A_3}{\partial y} = x \\ \\ \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} = 0 \\ \\ \frac{\partial A_1}{\partial y} = z. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (i)\ A_3 = xy + B(x,z) \\ \\ (ii)\ \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} = 0 \\ \\ (iii)\ A_1 = zy + C(x,z). \end{cases}$$

Substituíndo (i) e (iii) na equação (ii) temos

$$y + \frac{\partial C}{\partial z} - y - \frac{\partial B}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial C}{\partial z} - \frac{\partial B}{\partial x} = 0.$$

Podemos então considerar a solução deste equação com $B = C = 0$, obtendo

$$A(x,y,z) = (zy, 0, xy).$$

Pelo Teorema de Stokes:

$$\int_M F \cdot n\, dS = \int_M \text{rot } A \cdot n\, dS = \int_{\partial M} A \cdot dg,$$

onde ∂M é a circunferência

$$\partial M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = 4,\ z = 2\}$$

percorrida no sentido compatível com a orientação de M definida por n (isto é, no sentido horário quando observada por exemplo do ponto $(0,0,10)$).

Uma parametrização para ∂S com a orientação apropriada é dada por:

$$g(t) = (2\cos t, -2\sin t, 2), \quad 0 < t < 2\pi.$$

Assim, calculamos:

$$\begin{aligned}\int_{\partial M} A \cdot dg &= \int_0^{2\pi} A(g(t)) \cdot g'(t)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-4\sin t, 0, -4\cos t \sin t) \cdot (-2\sin t, -2\cos t, 0)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} 8\sin^2 t\, dt = 8\pi.\end{aligned}$$