Análise Matemática III
1º semestre de 2005/2006

Exercício teste 2 (a entregar na aula prática da semana de 26/9/2005)

1) Considere a região $V \subset \mathbb{R}^3$ definida por

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 4 - 2(x^2 + y^2), 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

a) Esboce a região V. Descreva **detalhadamente** os cortes de V perpendiculares ao eixo Oz (i.e. planos de equação $z = const.$).
b) Descreva **detalhadamente** os cortes de V perpendiculares ao eixo Oy (i.e. planos de equação $y = const.$).

2) Considere a região $A \subset \mathbb{R}^3$ definida por

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} < z < 2 - x^2 - y^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}.$$

a) Esboce a região A. Descreva **detalhadamente** os cortes de A perpendiculares ao eixo Oz.
b) Descreva **detalhadamente** os cortes de A perpendiculares ao eixo Ox.

Resolução

1. **a)** A equação $z = 4 - 2(x^2 + y^2)$ descreve um parabolóide invertido com eixo de simetria o eixo Oz. Esta superfície pode ser obtida por revolução da parábola descrita por $x = 0$ e $z = 4 - 2y^2$ em torno do eixo dos z. A condição $0 \leq z \leq 4 - 2(x^2 + y^2)$ indica que V está contido na região entre o parabolóide e o plano $z = 0$. Para além disso, temos também as condições $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$ que indicam que V é limitado pelos planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ e $y = 1$.

Quando $x = 0$ e $0 \leq y \leq 1$ temos $0 \leq z \leq 4 - 2y^2$, ou seja, a intersecção de V com o plano $x = 0$ é dada pela região desse plano limitada por $0 \leq y \leq 1$ e $0 \leq z \leq 4 - 2y^2$.

Quando $y = 0$ e $0 \leq x \leq 1$ obtemos o mesmo resultado substituindo y por x.

Quando $x = 1$ e $0 \leq y \leq 1$, obtemos $0 \leq z \leq 2 - 2y^2$. Portanto, a intersecção do sólido com o plano $x = 1$ é dada pela região desse plano limitada por $0 \leq y \leq 1$ e por $0 \leq z \leq 2 - 2y^2$.

Quando $y = 1$ e $0 \leq x \leq 1$ obtemos o mesmo resultado substituindo y por x.

O sólido tem então a forma representada na Figura 1.

Cortes perpendiculares ao eixo Oz:

Para $2 \leq z \leq 4$, os cortes horizontais (de equação $z = const.$) são quartos de círculos, com raio $\sqrt{2 - z/2}$ (ver Figura 2). O valor do raio é obtido fazendo $z = const.$ na equação do parabolóide, obtendo-se a equação $x^2 + y^2 = 2 - z/2$ (circunferência de centro na origem e raio $\sqrt{2 - z/2}$).

Para $0 \leq z < 2$, estas circunferências começam a sair parcialmente do quadrado pelo que os cortes horizontais para estes valores de z são obtidos pela intersecção do círculo de raio $\sqrt{2 - z/2}$ com o quadrado $0 \leq x, y \leq 1$ (ver Figura 3).

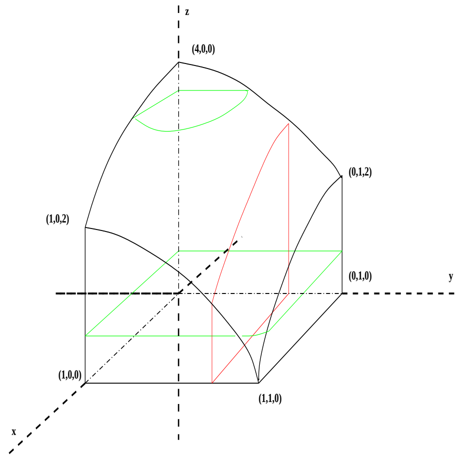

FIGURA 1. O sólido V.

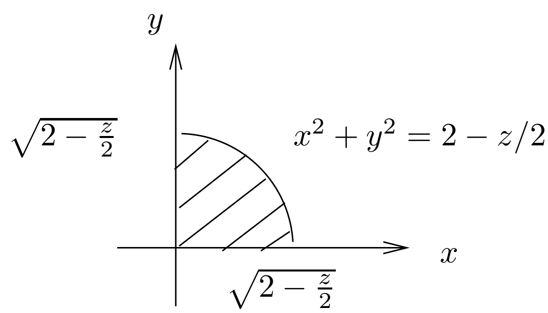

FIGURA 2. Cortes perpendiculares ao eixo Oz, com $z \in [2,4]$.

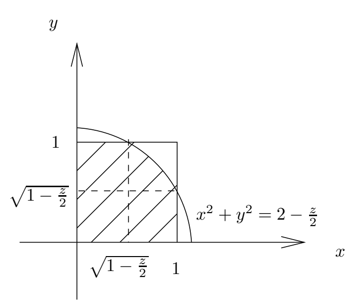

FIGURA 3. Cortes perpendiculares ao eixo Oz, com $z \in [0,2]$.

b) Os cortes de equação $y = const.$ são limitadas pelas condiçẽs $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq z \leq 4 - 2y^2 - 2x^2$, com $y = const.$ fixo num valor entre 0 e 1 (ver Figura 4).

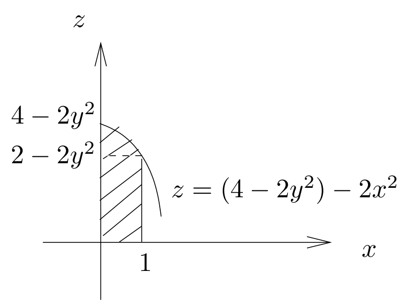

FIGURA 4. Cortes perpendiculares ao eixo Oy, com $z \in [0, 1]$.

2. **a)** Como o vértice do parabolóide $z = 2 - x^2 - y^2$ é o ponto $(0, 0, 2)$, a coordenada z assume todos os valores do intervalo $[0, 2]$. Seja $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ (ρ é a distância ao eixo Oz). Resolvendo a equação $\rho^2 + \rho - 2 = 0$, conclui-se que o parbolóide e o cone se intersectam numa circunferência de raio 1, contida no plano $z = 1$.

   Assim, para os cortes perpendiculares ao eixo Oz, há dois casos a considerar: $z \in [0, 1]$ e $z \in [1, 2]$. No primeiro caso, o corte é limitado pela intersecção com o cone (ver Figura 5), enquanto no segundo caso o corte é limitado pela intersecção com o parabolóide (ver Figura 6).

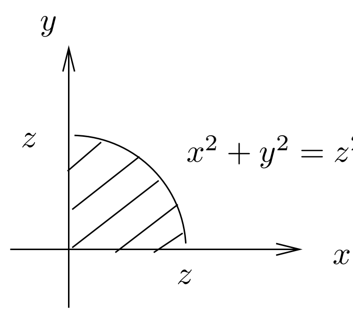

FIGURA 5. Cortes perpendiculares ao eixo Oz, com $z \in [0, 1]$.

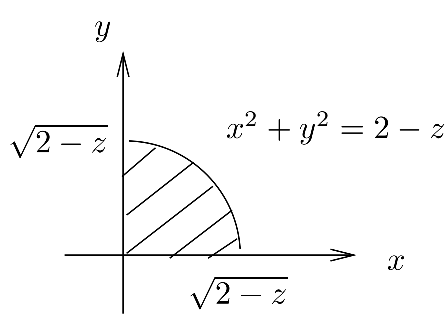

FIGURA 6. Cortes perpendiculares ao eixo Oz, com $z \in [1, 2]$.

Para x entre 0 e 1 obtemos os cortes perpendiculares ao eixo Ox representados na Figura 7.

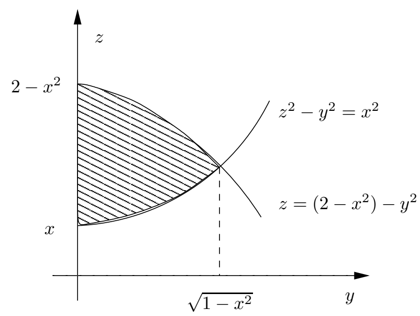

Figura 7. Cortes perpendiculares ao eixo Ox.