Análise Matemática III

1º semestre de 2005/2006

Exercício Teste 3 (a entregar na semana de 4/10/2005)

3.1. Mostre que a fronteira ∂A do conjunto

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 < z \ ; \ x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$$

tem medida nula em $\mathbb{R}^3$.

3.2. Considere a função, $f \ : \ I \ \to \mathbb{R}$, onde I é o intervalo, $I =]0, 2[\times]1, 3[\times]2, 4[$ e f é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1, \quad 1 < y < 3, \quad 2 < z < 4 \\ \operatorname{sen}(yz) & x = 1, \quad 1 < y < 3, \quad 2 < z < 4 \\ 0.5 & 1 < x < 2, \quad 1 < y < 3, \quad 2 < z < 3 \\ \pi & 1 < x < 2, \quad 1 < y < 3, \quad 3 \le z < 3.5 \\ 2 & 1 < x < 2, \quad 1 < y < 3, \quad 3.5 \le z < 4 \end{cases}$$

3.2.a) f é uma função em escada? Porquê?

3.2.b) Calcule $\int_I f$.

Resolução

3.1 A fronteira ∂A de A está contida na união dos seguintes conjuntos (superfícies)

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2\} \\ S_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, \ z \ge 0\}, \\ \partial A &\subset S_1 \cup S_2. \end{aligned}$$

O conjunto S_1 coincide com o gráfico em $\mathbb{R}^3$ da função contínua

$$\begin{aligned} f_1 &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ f_1(x, y) &= x^2 \ , \end{aligned}$$

$S_1 = G(f_1)$, pelo que tem medida nula. $S_2 = G(f_2)$ é o gráfico da função f_2, definida e contínua num subconjunto fechado de $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} f_2 &: B \to \mathbb{R} \\ f_2(x, y) &= \sqrt{1 - x^2 - y^2} \ , \end{aligned}$$

onde $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$, pelo que também tem medida nula. Como a união de dois conjuntos de medida nula tem medida nula e qualquer subconjunto de um conjunto de medida nula tem medida nula concluímos que ∂A tem medida nula.

3.2.a) f é uma função em escada porque está definida num intervalo limitado I de $\mathbb{R}^3$ e existem quatro subintervalos de I, I_1, I_2, I_3, I_4 ,

$$\begin{aligned} I_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 < x \le 1, 1 < y < 3, 2 < z < 4\}, \\ I_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 1 < x < 2, 1 < y < 3, 2 < z < 3\}, \\ I_3 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 1 < x < 2, 1 < y < 3, 3 \le z < 3.5\}, \\ I_4 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 1 < x < 2, 1 < y < 3, 3.5 \le z < 4\}, \end{aligned}$$

tais que se intersectam só nas suas fronteiras, a sua união é igual a I,

$$I = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4,$$

e f é constante no interior de cada um destes subintervalos.

$$f(x,y,z) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad (x,y,z) \in \mathrm{int}(I_1) \\ 0.5 & \text{se} \quad (x,y,z) \in \mathrm{int}(I_2) = I_2 \\ \pi & \text{se} \quad (x,y,z) \in \mathrm{int}(I_3) \\ 2 & \text{se} \quad (x,y,z) \in \mathrm{int}(I_4), \end{cases}$$

onde $\mathrm{int}(A)$ designa o interior do conjunto A.

3.2.b) $\iiint_I f = 1 \times vol_3(I_1) + 0.5 \times vol_3(I_2) + \pi \times vol_3(I_3) + 2 \times vol_3(I_4) = 7 + \pi$.