

# Análise Matemática III

1º semestre de 2005/2006

## Exercício Teste 4 (a entregar na semana de 10/10/2005)

Considere a região  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2} < z < 2 - x^2 - y^2\}$ .

1. Escreva uma expressão para o volume de  $A$  em termos de integrais iterados da forma

$$\iiint dx dy dz \quad \text{e} \quad \iiint dz dy dx.$$

2. Calcule a massa de  $A$  dado que a densidade é  $\rho(x, y, z) = 4z|y| \text{ gr/cm}^3$ .

### Resolução:

1. Tem-se

$$\begin{aligned} \text{vol}A &= \int_A 1 \\ &= \int_0^1 \int_{-z}^z \int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} dx dy dz + \int_1^2 \int_{-\sqrt{2-z}}^{\sqrt{2-z}} \int_{-\sqrt{2-z-y^2}}^{\sqrt{2-z-y^2}} dx dy dz \end{aligned}$$

ou

$$\text{vol}A = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2-x^2-y^2} dz dy dx.$$

2. Tem-se

$$\begin{aligned} \text{Massa}(A) &= \int_A \rho = \int_A 4z|y| = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2-x^2-y^2} 4z|y| dz dy dx \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 2|y| [z^2]_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{z=2-x^2-y^2} dy dx \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 2|y|(4 - 5(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2)^2) dy dx \\ &= 4 \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y(4 - 5(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2)^2) dy dx \\ &= 4 \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y(4 - 5(x^2 + y^2) + x^4 + y^4 + 2x^2y^2) dy dx \\ &= 4 \int_{-1}^1 \left[ 2y^2 - \frac{5x^2y^2}{2} - \frac{5y^4}{4} + \frac{x^4y^2}{2} + \frac{y^6}{6} + \frac{x^2y^4}{2} \right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= 4 \int_{-1}^1 \left( 2(1-x^2) - \frac{5x^2}{2}(1-x^2) - \frac{5}{4}(1-x^2)^2 + \frac{x^4}{2}(1-x^2) + \frac{1}{6}(1-x^2)^3 + \frac{x^2}{2}(1-x^2)^2 \right) dy dx \\ &= \frac{80}{21} \text{ gr} \end{aligned}$$