Análise Matemática III
1º semestre de 2005/2006

Proposta de Resolução do Exercício Teste 5

(a entregar na aula prática da semana de 17/10/2005)

1) Considere o integral

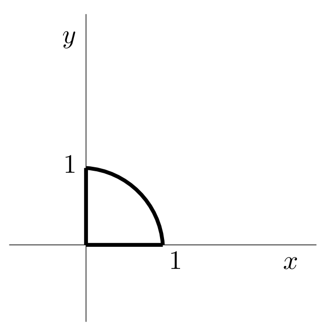
$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_{\sqrt{1-x^2-y^2}}^{2-x^2-y^2} dz\, dx\, dy \ .$$

a) Esboce a região de integração e escreva (sem calcular) uma expressão para o integral em termos de integrais iterados, na ordem $dy\, dx\, dz$.

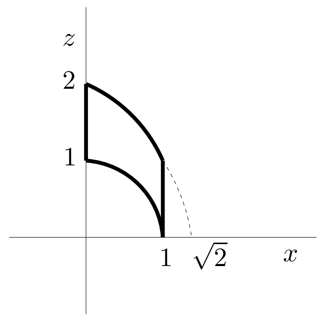
b) Calcule o integral utilizando coordenadas cilíndricas.

Resolução

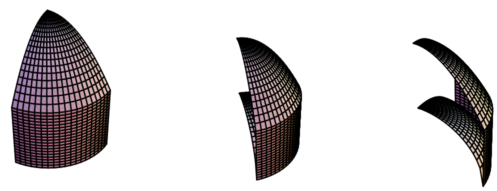
1. A equação $x = \sqrt{1-y^2}$ representa no plano xy metade da circunferência $x^2 + y^2 = 1$. A projecção da região de integração no plano xy, codificada nos limites dos dois integrais exteriores, é pois o quarto de disco dado por $x, y \geq 0$ e $x^2 + y^2 \leq 1$, compreendido entre as linhas a grosso na figura seguinte:



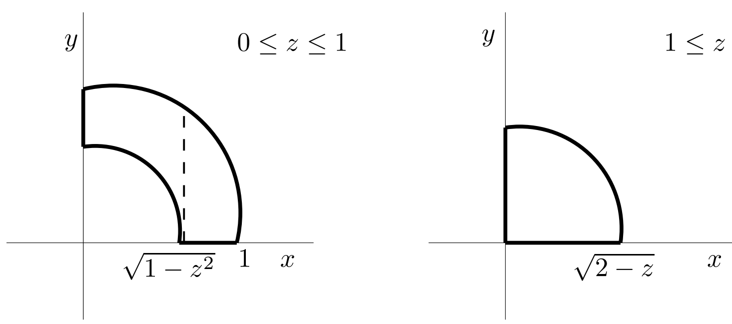
A equação $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ representa o hemisfério norte ($z \geq 0$) da esfera unitária; a equação $z = 2 - x^2 - y^2$ representa um parabolóide. O corte da região de integração no plano $y = 0$ é a zona definida por $0 \leq x \leq 1$ e $\sqrt{1-x^2} \leq z \leq 2 - x^2$, limitada pelas curvas a grosso:



A região de integração é obtida desta superfície no plano xz por revolução de 90º em torno do eixo dos zz. A sua fronteira está representada na figura seguinte:



Para obter uma expressão para o integral na ordem $dy\,dx\,dz$ vamos considerar os cortes horizontais (i.e., $z =$constante)



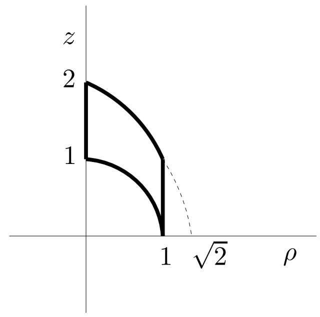
Fazendo z constante com $0 \leq z \leq 1$ obtemos quartos de coroa circular (limitados pela esfera e pelo cilindro): $x^2 + y^2 \geq 1 - z^2$ e $x^2 + y^2 \leq 1$, com $x, y \geq 0$. Fazendo z constante com $1 \leq z \leq 2$ obtemos quartos de disco (limitados pelo parabolóide): $x^2 + y^2 \leq 2 - z$, com $x, y \geq 0$. Por isso, o integral dado pode ser escrito como

$$\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-z^2}} \int_{\sqrt{1-z^2-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\,dx + \int_{\sqrt{1-z^2}}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy\,dx \right) dz$$
$$+ \int_1^2 \int_0^{\sqrt{2-z}} \int_0^{\sqrt{2-z-x^2}} dy\,dx\,dz.$$

2. Como o sólido possui simetria axial em relação ao eixo Oz vamos utilizar uma mudança de coordenadas para coordenadas cilíndricas

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\theta \\ y &= \rho\sin\theta \\ z &= z \end{aligned}$$

Fazendo um corte com θ constante $(0 < \theta < \pi/2)$ obtemos a seguinte figura.



A curva $\rho^2+z^2 = 1$ representa uma circunferência de raio 1 no plano (ρ, z), enquanto que a curva $z = 2 - \rho^2$ representa uma parábola. Assim, com base neste corte podemos calcular o volume da região S em coordenadas cilíndricas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &\int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_{\sqrt{1-\rho^2}}^{2-\rho^2} \rho\, dz\, d\rho\, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 \rho\,(2-\rho^2-\sqrt{1-\rho^2})\, d\rho\, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2}\left[\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} + \frac{1}{3}(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{\rho=0}^{\rho=1} \\ &= \frac{5\pi}{24}. \end{aligned}$$