Análise Matemática III

1º semestre de 2005/2006

Exercício Teste 6 (a entregar na semana de 24/10/2005)

Considere a curva $C \subset \mathbb{R}^3$ correspondente à intersecção das seguintes superfícies

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + 2z^2 = 1\}$$

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y = 1\}$$

Suponha que a densidade de massa de C é $\sigma = \sqrt{\frac{1}{4} + z^2}$.

a) Parametrize a curva C.

b) Calcule o momento de inércia da curva em relação ao eixo Oz.

c) Calcule o trabalho realizado pelo campo $F = (z, 0, -x)$, definido em $\mathbb{R}^3$, ao longo da curva C percorrida no sentido horário em relação a um observador colocado no ponto $(10, 0, 0)$.

d) O campo F pode ser um campo gradiente? E fechado, pode ser? Justifique.

Resolução

a) A projecção da curva C no plano Oxz é obtida eliminando y do sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2z^2 &= 1 \\ x + y &= 1 \end{cases}$$

Substituindo $y = 1 - x$ na primeira equação obtemos

$$2x^2 - 2x + 2z^2 = 0 <=> (x - \frac{1}{2})^2 + z^2 = \frac{1}{4}.$$

Vemos que projecção de C no plano Oxz é uma circunferêcia de raio $\frac{1}{2}$ com centro no ponto $x = \frac{1}{2}$, $z = 0$. Parametrizando esta circunferência da forma usual

$$\begin{cases} x &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(\theta) \\ z &= \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\theta) \ , \end{cases} \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi \ ,$$

obtemos a seguinte parametrização de C

$$g \ : \begin{cases} x &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(\theta) \\ y &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(\theta) \\ z &= \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\theta) \quad , \ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

A função, $g \ : \ [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, é de classe C^1, injectiva excepto nos extremos e a sua imagem é, $g([0, 2\pi]) = C$. Temos também que $g'(\theta) = (-\frac{1}{2}\operatorname{sen}(\theta), \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\theta), \frac{1}{2}\cos(\theta)) \neq 0$ para todo $\theta \in [0, 2\pi]$, uma vez que o seno e o coseno nunca se anulam simultaneamente. Assim, g é uma parametrização regular da curva fechada simples C.

b) Para o momento de inércia em relação ao eixo Oz temos então,

$$\begin{aligned}
I &= \int_C \left(x^2+y^2\right)\sigma = \int_0^{2\pi} \left(x^2(\theta)+y^2(\theta)\right)\ \sigma(g(\theta))||g'(\theta)||\ d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left(1-\cos^2(\theta)\right)\ \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\ \operatorname{sen}^2(\theta)}\ \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\ \operatorname{sen}^2(\theta)}\ d\theta \\
&= \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} \left(1+\operatorname{sen}^2(\theta)-\cos^2(\theta)-\operatorname{sen}^2(\theta)\cos^2(\theta)\right)\ d\theta \\
&= \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} \left(1-\cos(2\theta)-\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2(2\theta)\right)\ d\theta \\
&= \frac{\pi}{4}-\frac{1}{64}\int_0^{2\pi} (1-\cos(4\theta))\ d\theta = \frac{7}{32}\pi.
\end{aligned}$$

c) A parametrização g da alínea a) percorre C no sentido do eixo Ox para o eixo Oz o que coincide com o sentido horário para um observador no ponto $(10,0,0)$ (e sentido anti-horário para um observador no ponto $(0,10,0)$, por exemplo). O trabalho de F é assim dado por

$$\begin{aligned}
\oint_C F\ \cdot\ dg &= \int_0^{2\pi} F(g(\theta))\cdot g'(\theta)\ d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}(\theta), 0, -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(\theta)\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\operatorname{sen}(\theta), \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\theta), \frac{1}{2}\cos(\theta)\right) = \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2(\theta)-\frac{1}{4}\cos(\theta)-\frac{1}{4}\cos^2(\theta)\right)\ d\theta = \\
&= -\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} (1+\cos(\theta))\ d\theta = -\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

d) O campo F não pode ser um campo gradiente porque realiza trabalho diferente de zero ao longo da curva fechada C.